EMISSIONE DI RADIAZIONE
da particelle cariche accelerate.

POTENZIALI RITARDATI di LIENARD - WIECHERT:

l'effetto del campo e.m. generato da q al tempo t' ad una distanza $R(t')$ dall'osservatore o, è percepito in o ad un tempo posteriore $t = t' + \frac{R(t')}{c}$ a causa della velocità di propagazione c del campo e.m. (nel moto).

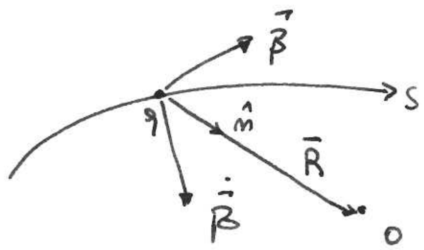
$t' :=$ TEMPO RITARDATO o TEMPO PROPRIO

↳ perché è il tempo conteggiato nel sistema di rif. solidale al moto di q

I potenziali ritardati possono essere calcolati in funzione di coordinate e velocità valutate al tempo t':

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q}{R(1-\hat{n}\vec{\beta})}\right]_{t'} \\ \vec{A} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q\vec{\beta}}{R(1-\hat{n}\vec{\beta})}\right]_{t'} \end{cases}$$

dove



$\Downarrow$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \cancel{\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(1-\hat{n}\vec{\beta})^3_{t'}}\left\{\underbrace{\dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{(\hat{n}-\vec{\beta})}{R^2}}_{\substack{\text{termine di} \\ \text{"VELOCITA" o} \\ \text{"NEAR FIELD"}}} + \underbrace{\dfrac{\hat{n}\times\left[(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]}{cR}}_{\substack{\text{termine di} \\ \text{"ACCELERAZIONE"} \\ \text{o "FAR FIELD"}}}\right\}_{t'} \\ c\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E} \end{cases}$$

N.B. 1: il termine "near field" rappresenta il campo elettrico coulombiano, t.c. per una particella in regime non relativistico ($\vec{\beta} \to 0$) il campo è diretto lungo la direzione di osservazione $\hat{n}$. Inoltre la sua dipendenza dalla distanza è $\sim 1/R^2$ come dettato dalla legge di Coulomb. Infine, $1/\gamma^2$ è la correzione relativistica al campo per particelle in moto e determina la dipendenza dall'energia della particella (effetto di CARICA SPAZIALE in fasci accelerati).

N.B. 2: il termine di "far field" è sempre ORTOGONALE alla direzione di osservazione $\hat{n}$, cioè rappresenta il campo $\vec{E}$ associato al fronte d'onda di un'onda piana propagantesi nel vuoto ($R \to \infty$).

• Significato del termine $(1-\hat{n}\vec{\beta})$.

1) Il termine $(1-\hat{n}\vec{\beta})$ è introdotto nei potenziali ritardati per tener conto del moto della carica rispetto all'osservatore, quindi della modifica del campo e.m. nel lasso di tempo $(t-t')$ in O. In altre parole, il termine è atteso essere legato al passaggio di coordinate temporali $t' \to t$ (dal sistema proprio a quello dell'osservatore), infatti:

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}\frac{dt'}{dt};$$

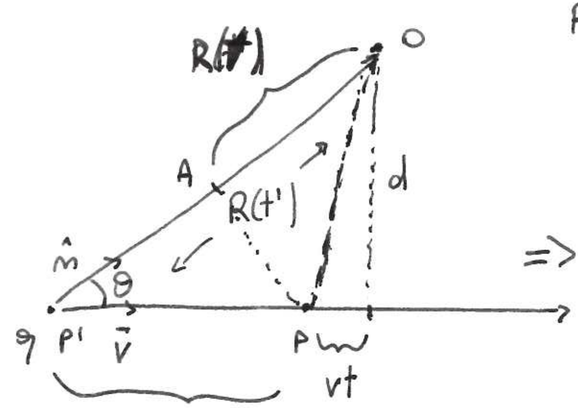
$$\frac{dt'}{dt}\Big(1 + \frac{1}{c}\underbrace{\frac{dR(t')}{dt'}}_{v(t')}\Big) = 1;$$

$\leftarrow$ velocità di q osservata da O, calcolata al tempo t'

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{(1-\hat{n}\vec{\beta})_{t'}}}$$

, dove il segno "−" indica la direzione negativa di $\vec{R}$ da q verso O (in simultanea alla linea di forza del campo).

2) Geometricamente:



$v(t'-t) = \beta R(t')$

$$R(t) = R(t') + \hat{n}\vec{v}(t-t') =$$
$$= R(t') + \hat{n}\vec{v}\,\frac{R(t')}{c} =$$
$$= R(t')(1+\beta\cos\theta);$$
$$\Rightarrow \boxed{R(t) = R(t')(1-\hat{n}\vec{\beta})}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME ($\dot{\vec{\beta}} = 0$)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2}\left[\frac{\hat{n}-\vec{\beta}}{R^2(1-\hat{n}\vec{\beta})^3}\right]_{t'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{R(\hat{n}-\vec{\beta})}{R^3(1-\hat{n}\vec{\beta})^3}\right)_{t'}.$$

Verifichiamo che tale espressione è riconducibile a quella calcolata come trasformazione di Lorentz del campo dal sistema di rif. della carica a quello del laboratorio (vedi Appunti precedenti). Ci limitiamo per semplicità alla componente di $\vec{E}$ ORTOGONALE a $\vec{\beta}$. In tal caso:

$R(t')(\hat{n}-\vec{\beta})_\perp = R(t')\sin\theta$.

Dalla costruzione geometrica di cui sopra ricaviamo:

$$R(t')(1-\hat{n}\vec{\beta}) = R(t) = \overline{AO} = \sqrt{\underbrace{(d^2+v^2t^2)}_{\overline{OP}^2} - \overline{AP}^2}, \quad \text{dove } \overline{AP} = \beta R\sin\theta = \beta d,$$

quindi:

$$R(t')(1-\hat{n}\vec{\beta}) = \sqrt{d^2+v^2t^2-\beta^2 d^2} = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2}\left(d^2+\gamma^2 v^2 t^2\right)}.$$

Otteniamo infine per il campo E_Y:

$$E_Y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2}\frac{R\sin\theta}{\sqrt{(d^2+\gamma^2v^2t^2)^3}}\gamma^3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma d}{(d^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \quad \text{CVD}$$

N.B.: al tempo $t=0$ il campo E_Y è pari al campo elettrostatico di una particella immobile sulla perpendicolare dell'osservatore O ($\theta = \pi/2$)

MOTO ACCELERATO, GRANDI DISTANZE ($R \to \infty$)

• REGIME NON RELATIVISTICO ($\beta \to 0$)

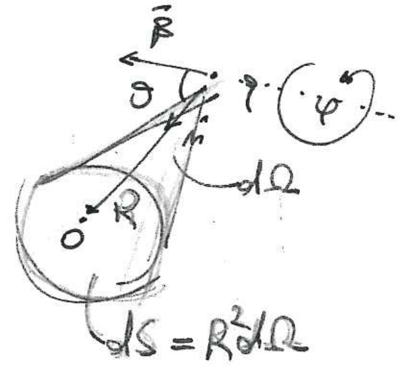
Il termine di "velocità" di $\vec{E}$ è trascurabile rispetto a quello di "accelerazione" a causa della più forte dipendenza da R ($1/R^2$ vs. $1/R$). Per $\beta \to 0$ otteniamo

$$\vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}})}{cR}\right]_{t'} \sim \sin\theta$$

Vettore di Poynting: $\vec{S}\left[\frac{J}{sec.\ m^2}\right] := c\varepsilon_0(\vec{E}\times c\vec{B}) = c\varepsilon_0|\vec{E}|^2\hat{n}$

(onda piana nel moto)

Potenza istantanea irradiata:



$$\boxed{P} = \int_{Sp}|\vec{S}\cdot\hat{n}|R^2 d\Omega =$$

↳ $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta$

$$= c\varepsilon_0\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{R^2}{c^2R^2}|\dot{\vec{\beta}}(t')|^2\, 2\pi\underbrace{\int_0^{\pi}d\theta\sin^3\theta}_{=4/3} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}|\vec{a}(t')|^2}.$$

FORMULA DI LARMOR in regime NON RELATIVISTICO ($t' \simeq t$)

POTENZA ISTANTANEA IRRAGGIATA: INVARIANTE DI LORENTZ

Si dimostra che la formula di Larmor per la potenza irraggiata da una singola particella in moto accelerato non relativistico è una approssimazione di una espressione relativistica, e che quest'ultima è un invariante di Lorentz. In tal caso, l'espressione relativistica è valutata direttamente come invariante pari al prodotto scalare del 4-vettore forza. Questo risulta, in forma covariante:

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{u}\,,\ \gamma\vec{F}\right);$$

$$P = -\frac{2}{3}\frac{r_e}{m_e c} F^\mu F_\mu = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{m_e^2 c^3}\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau} \qquad (\tau = t')$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau} = \boxed{\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\epsilon}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{p}}{dt'}\right)^2} = \ldots \text{ dimostriamo l'invarianza applicando le trasf. Lorentz} \times \epsilon, \vec{p}$$

$$\begin{cases} \epsilon = \gamma(\epsilon' + v_x p'_x) \\ p_x = \gamma\left(p_x' + \frac{v_x}{c^2}\epsilon'\right) \\ p_{y,z} = p_{y',z'} \end{cases}$$

$$\ldots = \frac{1}{c^2}\left(\gamma\frac{d\epsilon'}{dt'} + \gamma v_x\frac{dp_x'}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{dp'_{y,z}}{dt'}\right)^2 - \left(\gamma\frac{dp_x'}{dt'} + \gamma\frac{v_x}{c^2}\frac{d\epsilon'}{dt'}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[\gamma^2\left(\frac{d\epsilon'}{dt'}\right)^2 + \gamma^2 v_x^2\left(\frac{dp_x'}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{dp_{y,z}}{dt'}\right)^2 + \cancel{2\gamma^2 v_x\frac{d\epsilon'}{dt'}\frac{dp_x'}{dt'}} + \right.$$

$$\left. -\gamma^2\left(\frac{dp_x'}{dt'}\right)^2 - \gamma^2 v_x^2\left(\frac{d\epsilon'}{dt'}\right)^2 - \cancel{2\gamma^2 v_x\frac{d\epsilon'}{dt'}\frac{dp_x'}{dt'}}\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\epsilon'}{dt'}\right)^2\cancel{\gamma^2(1-\beta^2)} - \left(\frac{dp_x'}{dt'}\right)^2\cancel{\gamma^2(1-\beta^2)} - \left(\frac{dp'_{y,z}}{dt'}\right)^2 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\epsilon'}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{p}'}{dt'}\right)^2} \quad \text{cvd}$$

Esplicitiamo P in forma "cinematica", funzione di $\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{\beta}}$. Data l'invarianza di P scegliamo LAB $\equiv$ SR' (e omettiamo l'accento):

$$\begin{cases} \dfrac{d\epsilon}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = m_0 c^2 \cancel{(-2)}\cancel{\left(-\tfrac{1}{2}\right)}\gamma^3(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}) = m_0 c^2\gamma^3(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}); \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\gamma m_0\vec{\beta}c) = m_0 c\left(\gamma\dfrac{d\vec{\beta}}{dt} + \vec{\beta}\dfrac{d\gamma}{dt}\right) = m_0 c\left[\gamma\dot{\vec{\beta}} + \gamma^3\dot{\vec{\beta}}\cdot(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})\right] = \\ \qquad = m_0 c\left[\gamma\dot{\vec{\beta}} + \gamma^3\dot{\vec{\beta}}\vec{\beta}^2\right] = m_0 c\,\gamma^3\dot{\vec{\beta}}; \end{cases}$$

Quindi $$P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{\cancel{m_e^2}c^3}\cancel{m_0^2}c^2\gamma^6\left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right] = *$$

$$= -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\right)\gamma^6\left[|\dot{\vec{\beta}}|^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right].$$

Calcoliamo nel caso $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ (LINAC):

$$P^{\parallel} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6|\vec{a}_{\parallel}|^2 .$$

Calcoliamo nel caso $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$ (SINCROTRONE):

$$P^{\perp} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6|\dot{\vec{\beta}}|^2\left(1-|\vec{\beta}|^2\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^4|\dot{\vec{\beta}}_{\perp}|^2$$

I risultati precedenti – dipendenza da γ – sono ottenibili anche per via della forza relativistica:

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau} = -F^\mu F_\mu = -\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right)^2 + \gamma^2|\vec{F}|^2 = \begin{cases} \gamma^2 F_{\parallel}^2(1-\beta^2) = F_{\parallel}^2 & (\vec{a}\parallel\vec{u}) \\ \gamma^2 F_{\perp}^2 & (\vec{a}\perp\vec{u}) \end{cases}$$

Ricordando che $\vec{F}_{\parallel} = \gamma^3 m_0 \vec{a}_{\parallel}$, $\vec{F}_{\perp} = \gamma m_0 \vec{a}_{\perp}$:

$$P = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{\cancel{m_0^2}}\begin{cases}\gamma^6 \cancel{m_0^2} a_{\parallel}^2 \\ \gamma^4 \cancel{m_0^2} a_{\perp}^2\end{cases} \propto \begin{cases}\gamma^6 a_{\parallel}^2 \\ \gamma^4 a_{\perp}^2\end{cases}$$

e per $\gamma \to 1$, $P \to P_L$ (non-relativistico)

Infine osserviamo che A PARITÀ di FORZA imposta alla particella:

$$F_{\parallel} = F_{\perp} \Rightarrow \gamma^3 a_{\parallel} = \gamma a_{\perp} \Rightarrow a_{\perp} = \gamma^2 a_{\parallel},$$ tale che:

$$\frac{P_{\parallel}}{P_{\perp}} = \frac{\gamma^6 a_{\parallel}^2}{\gamma^4 a_{\perp}^2} = \frac{\gamma^6 \cancel{a_{\parallel}^2}}{\gamma^8 \cancel{a_{\parallel}^2}} = \frac{1}{\gamma^2}.$$

, la potenza TOTALE irraggiata da una acc. CENTRIPETA = γ^2-volte maggiore di quella irraggiata in presenza di acc. lineare.

POTENZA IRRAGGIATA – LINAC in REGIME RELATIVISTICO.

Ricordiamo
$$\begin{cases} \dfrac{dp_{y,z}}{dt} = 0 \\ p_{y,z} \ll p_x \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp_x}{dt} \simeq \frac{dp}{dt} \quad (x = s) \qquad \text{e} \qquad dp = \frac{dE}{\beta c}$$

Quindi dall'invariante di Lorentz:

$$\boxed{P_{LINAC}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{m_0^2c^3}\gamma^2\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{m_0^2c^3}\gamma^2\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\right] =$$

$$dt' = \frac{dt}{\gamma}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{m_0^2c^3}\frac{1}{c^2}\frac{\cancel{\gamma^2(1-\beta^2)}}{\beta^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{m_0^2c^3}\left(\frac{dE}{ds}\right)^2}$$

Il rapporto della POTENZA ISTANTANEA IRRAGGIATA sulla POTENZA ACCUMULATA dalla particella in accelerazione è:

$$\frac{P_{LINAC}}{\left(\frac{dE}{dt}\right)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{m_0^2c^3}\frac{1}{\beta}\left(\frac{dE}{ds}\right) = \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{r_e}{\beta c}\frac{d\gamma}{ds}} \ll 1$$

$$\approx \frac{10^{-1}\cdot 10^{-15}}{10^{-12}}\frac{10^8}{10^8} \approx 10^{-4}$$

TRASCURABILE per ogni tipo di particella

POTENZA IRRAGGIATA – ANELLO in REGIME RELATIVISTICO.

Assumendo che la variazione di ENERGIA per GIRO sia $\ll$ variazione di IMPULSO dovuta alla ACCELERAZIONE CENTRIPETA, $\frac{1}{c}\left(\frac{dE}{dt}\right)_{turn} \ll \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{turn} \simeq \left(\frac{dp_z}{dt}\right)_{turn}$, e ricordando che in regime relativistico $F_\perp = \gamma m_0 a_\perp$, troviamo:

$$\boxed{P_{SR}} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{\cancel{m_0^2}c^3}\gamma^2\cdot\gamma^2\cancel{m_0^2}\frac{v_z^4}{R^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}q^2c\frac{\beta^4\gamma^4}{R^2}} \sim \left(\frac{E}{m_0}\right)^4\frac{1}{R^2}.$$

a parità di energia TOTALE, particelle più "leggere" avrebbero maggiore P_{SR} $\Rightarrow$ LEPTONI vs ADRONI.

ENERGIA PER GIRO:

$$\boxed{U_0} = \oint \frac{P_{SR}}{\beta c}ds = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\beta^3\gamma^4\underbrace{\oint\frac{ds}{R^2}}_{\simeq \frac{2\pi}{R}} \simeq \boxed{\frac{q^2}{3\varepsilon_0}\frac{\beta^3\gamma^4}{R}}$$

$$U_0[eV] = 8.85\cdot 10^4\,\frac{E^4[GeV]}{R[m]} = 2.65\cdot 10^4\,E^3[GeV]\,B[T]$$

$$P_{tot}\,(1\text{ bunch}) = \frac{U_0 N_b}{T_{rev}} = \frac{U_0 I_b}{e}.$$

DISTRIBUZIONE ANGOLARE della POTENZA IRRAGGIATA ($R\to\infty$)

La quantità di energia irraggiata in un intervallo temporale (t_2-t_1) valutato nella posizione dell'osservatore O è:

$$U(t_2-t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega d\Omega \left(|\vec S\cdot\hat n|R^2\right)_{t'} = \int_{t_1'}^{t_2'} \underbrace{\int_\Omega d\Omega \left(|\vec S\cdot\hat n|R^2 \frac{dt}{dt'}\right)}_{\equiv \frac{dP(t')}{d\Omega}} dt'$$

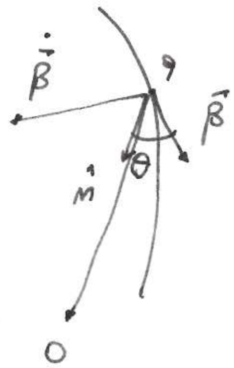
al tempo "PROPRIO" t_1', t_2'

Dalla def. $\frac{dt}{dt'} = (1-\hat n\cdot\vec\beta)_{t'}$, troviamo:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = c\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{(1-\hat n\cdot\vec\beta)_{t'}}{(1-\hat n\cdot\vec\beta)^6_{t'}} \left\{\cancel{R^2}\frac{|\hat n\times[(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}]|^2}{c^2\cancel{R^2}}\right\}_{t'} =$$

potenza irraggiata per unità di angolo solido, al tempo t'!

$$= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^5_{t'}}\left\{\frac{\cancel{R^2}\,|\hat n\times[(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}]|^2}{\cancel{R^2}}\right\}_{t'}$$



- $\boxed{\vec\beta \parallel \dot{\vec\beta} \quad (\text{LINAC})}$

Nella espressione di cui sopra:

$$\hat n\times\left[(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}\right] = \hat n\times\left[(\hat n\times\dot{\vec\beta}) - \underbrace{(\vec\beta\times\dot{\vec\beta})}_{0}\right] =$$

$= \dot\beta\sin\theta\,\hat m$. Quindi:

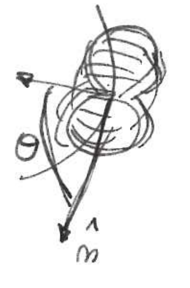
$$\boxed{\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2\,\dot\beta^2(t')}{16\pi^2 c\,\varepsilon_0}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5_{t'}}} \Rightarrow \theta(P_{MAX}) \xrightarrow{\beta\to1} \pm\frac{1}{2\gamma}$$

$$\sigma_\theta \simeq \pm\frac{1}{\gamma}$$

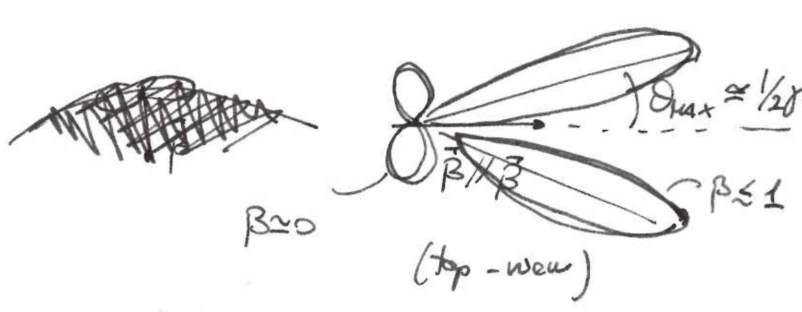
Nel regime NON RELATIVISTICO, $\beta\to0$, otteniamo la FORMULA di LARMOR (con dipendenza angolare):

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}(\beta\to0) \simeq \frac{q^2}{16\pi^2 c\,\varepsilon_0}\dot\beta^2\sin^2\theta$$

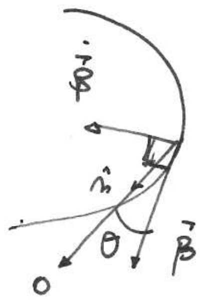
N.B.: la dipendenza angolare $\sim\sin^2\theta$ è la stessa che nel regime relativistico, nel sistema di riferimento della particella ($\beta=0$)!



$\beta\simeq0$ nel LAB,
o $\beta\lesssim1$ nel SR'



• $\boxed{\vec\beta \perp \dot{\vec\beta}}$ (SINCROTRONE)



Nella espressione di $\frac{dP(t')}{d\Omega}$ troviamo ora la seguente dipendenza angolare:

$$\hat n \times \left[(\hat n - \vec\beta)\times \dot{\vec\beta}\right] = \hat n \times \left[(\hat n \times \dot{\vec\beta}) - (\vec\beta \times \dot{\vec\beta})\right] =$$

$$= \hat n \times (\dot\beta\cos\theta - \dot\beta\beta)\hat j = \hat k\,\dot\beta(\cos\theta - \beta)$$ Quindi:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 c\varepsilon_0}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^5}\frac{\dot\beta^2}{\cancel{R^2}}\cancel{R^2}\underbrace{(\cos^2\theta + \beta^2 - 2\beta\cos\theta)}_{=(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 c\varepsilon_0}\frac{|\dot{\vec\beta}|^2}{(1-\beta\cos\theta)^3_{t'}}\left[1 - \frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]_{t'}$$

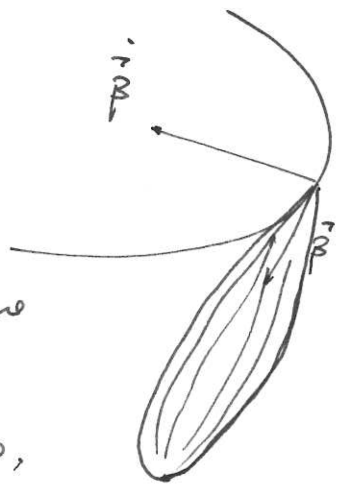
$[\cos^2\phi$ se l'osservatore non è nel piano $(\vec\beta, \dot{\vec\beta})]$

L'integrazione su $\int_0^\pi d\theta\sin\theta$ fornisce l'espressione già data di P_{SR} nel tempo t.

Espandendo il termine angolare per $\theta \ll 1$ troviamo che $\frac{dP(t')}{d\Omega} \propto \frac{1}{(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^3}$, cioè la potenza è già ridotta di un fattore $1/8$ rispetto all'emissione in asse ($\theta = 0$) quando $\theta = \pm\frac{1}{\gamma}$.

$\Rightarrow$ la maggior parte della P_{SR} (totale) è emessa entro un angolo $\boxed{\theta = \pm\frac{1}{(2)\gamma}}$

N.B.: la dipendenza angolare nel LAB per $P_{SR}(\theta)$ può essere ricavata in modo equivalente trasformando l'angolo di emissione di $\frac{dP(t')}{d\Omega}(\vec\beta \parallel \dot{\vec\beta}) \sim \sin^2\theta'$ dal SR' al LAB e nel limite $\beta \to 0$, ma in questo caso si perde parte della dipendenza esatta sopra derivata per $\beta \to 1$.



$$\left[\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}\right]$$

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 c\varepsilon_0} \underbrace{\frac{|\dot{\vec{\beta}}|^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1-\frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]}_{} = \dots$$

approssimazione ad angoli piccoli :

$\theta \ll 1$

in regime ultra - relativistico : $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \simeq \frac{1}{2(1-\beta)}$

$\gamma \gg 1$, $\beta \to 1$

$$\dots \simeq C_1' \frac{\dot{\beta}^2}{\left[1-\beta\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right]^3}\left\{1-\frac{\theta^2}{\gamma^2\left[1-\beta\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right]^2}\right\} =$$

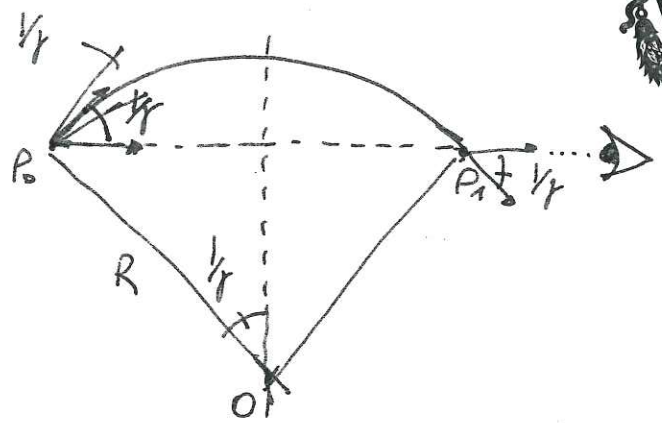
$$= C_1' \frac{\dot{\beta}^2}{\left[1-\beta+\beta\frac{\theta^2}{2}\right]^3}\left\{1-\frac{\theta^2}{\gamma^2\left[1-\beta+\beta\frac{\theta^2}{2}\right]^2}\right\} =$$

$$\simeq C_1' \frac{\dot{\beta}^2}{\left(\frac{1}{2\gamma^2}+\frac{\theta^2}{2}\right)^3}\left\{1-\frac{\theta^2}{\gamma^2\left(\frac{1}{2\gamma^2}+\frac{\theta^2}{2}\right)^2}\right\} =$$

$$= C_1' \frac{8\dot{\beta}^2}{\left(\theta^2+\frac{1}{\gamma^2}\right)^3}\left(1-\frac{4\theta^2}{\gamma^2\left(\theta^2+\frac{1}{\gamma^2}\right)^2}\right] \propto C_1' \frac{8\dot{\beta}^2}{\left(\theta^2+\frac{1}{\gamma^2}\right)^3}\left[1-O(\gamma^2\theta^2)\right] =$$

$$\propto \frac{1}{\left(\theta^2+\frac{1}{\gamma^2}\right)^3} .$$

DISTRIBUZIONE SPETTRALE
della RAD. SINCR. emessa
in un DIPOLO MAGNETICO.



- Il primo fotone viene emesso al punto P_0 e raggiunge P_1 al tempo: $2\dfrac{R\sin(1/\gamma)}{c}$, dove l'apertura angolare tipica della SR è $\pm 1/\gamma$.
- L'ultimo fotone è emesso in P_1 dopo che l'elettrone ha attraversato l'arco da P_0 a P_1, quindi ad un tempo $\dfrac{2R}{\gamma}\dfrac{1}{\beta c}$ dopo l'emissione del primo fotone in P_0.

⇒ la durata dell'impulso di fotoni vista dall'osservatore è:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{2R}{c}\left[\frac{1}{\beta\gamma} - \sin\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right] \underset{\gamma}{\simeq} \frac{2R}{c}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) = \frac{2R}{c\gamma}\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right) \underset{\gamma\gg1}{\simeq}$$

$$\underset{\substack{\gamma\gg1 \\ \beta\to1}}{\simeq} \frac{2R}{c\gamma}\underbrace{\frac{1}{\beta}}_{1}\left(1-1+\frac{1}{2\gamma^2}\right) = \frac{R}{c\gamma^3} \approx \frac{T_{riv}}{\gamma^3}.$$

⇒ la larghezza di banda spettrale associata sarà dell'ordine:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\Delta t} = 2\pi\frac{c\gamma^3}{R}.$$

Se assumiamo una emissione a BANDA LARGA t.c. $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 100\%$, ci aspettiamo la frequenza centrale (max. intensità) $\omega_0 \approx \frac{c\gamma^3}{R}$.

In effetti si dimostra che la FREQUENZA CRITICA è: $\boxed{\omega_c = \frac{3}{2}\frac{c\gamma^3}{R}}$,

$$\varepsilon_c = \hbar\omega_c = 2.218\,\frac{E^3[GeV]}{R[m]} = 0.665\,E^2[GeV]\,B[T]$$

Lo SPETTRO è CONTINUO, tipicamente da UV a raggi X.

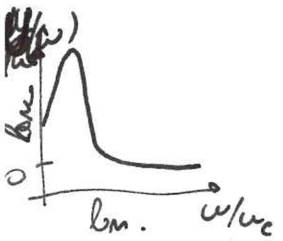
La distribuzione angolare di energia è calcolata con:

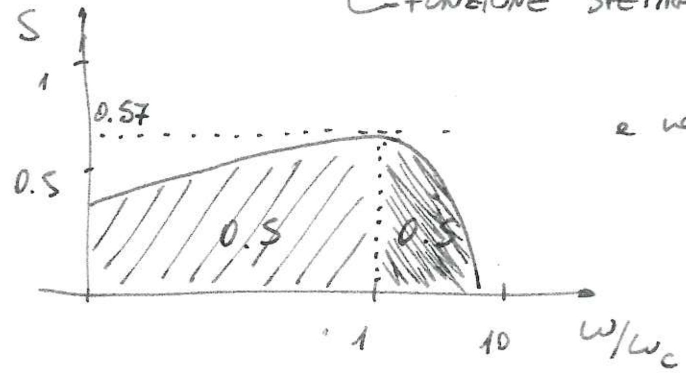
$$\frac{dU}{d\Omega} = \int \frac{dP}{d\Omega}\, dt \sim \int dt\, |\vec{E}|^2 \xrightarrow[\text{FOURIER}]{\text{TRASF.}}$$ otteniamo la distrib. di energia in frequenza: $\frac{d^2U}{d\Omega\, d\omega}$

$\Rightarrow$ risulta: $$\boxed{\frac{dU}{d\omega} = \frac{U_0}{\omega_c} S(\omega/\omega_c)}$$

← FUNZIONE SPETTRALE NORMALIZZATA

N.B.: $S \sim \ln U(\omega)$





e vale: $\int_0^1 d(\omega/\omega_c)\, S(\omega/\omega_c) = 0.5$, cioè metà della P irraggiata è a frequenze $0 < \omega < \omega_c$

POLARIZZAZIONE.

$$\frac{d^2P}{d\varphi\, d\theta} = \frac{21}{32} \frac{P_0}{2\pi} \gamma \frac{1}{(1+\gamma^2\theta^2)^{5/2}} \left(\underbrace{1}_{\text{MODO-}\sigma} + \underbrace{\frac{5}{7} \frac{\gamma^2\theta^2}{1+\gamma^2\theta^2}}_{\text{MODO-}\pi} \right)$$

MODO-σ, POL. ORIZZONTALE, $P_\sigma = \frac{7}{8} P_0$

MODO-π, POL. VERTICALE (solo per $\theta \neq 0$) $P_\pi = \frac{1}{8} P_0$

PARAMETRI STATISTICI della RAD. di SINCROTRONE.

Il fascio circolante nell'acceleratore interagisce con la radiazione emessa da se stesso. Dopo un numero elevato di giri, il fascio raggiunge un EQUILIBRIO DINAMICO della distribuzione di particelle nello sp. fase 6-D. Tali distribuzioni di equilibrio dipendono dai PARAMETRI STATISTICI della emissione di FOTONI. Riassumiamo qui di seguito:

$\langle \varepsilon \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} \varepsilon_c$, ENERGIA MEDIA dei FOTONI EMESSI

$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{11}{27} \varepsilon_c$, SCARTO QUADR. MEDIO

$\frac{dN_\gamma}{dt} = \frac{P}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_0}{\varepsilon_c}$, NUMERO MEDIO di FOTONI EMESSI per UNITÀ di TEMPO

$\frac{dN_\gamma}{d\theta} = \frac{N_\gamma R \langle I_b \rangle}{ec} = 1.3 \cdot 10^{17} E\,[\text{GeV}] \langle I_b \rangle [A]$, $\#\gamma$/sec/mrad-H.