RADIATION DAMPING:

smorzamento delle oscillazioni per emissione di radiazione di sincrotrone.

• DAMPING LONGITUDINALE:

consideriamo l'eq. del moto per oscillazioni di sincrotrone in approx. di piccole ampiezze: $\ddot{\phi} + \Omega_s^2 \phi = 0$, $\ddot{\varepsilon} + \Omega_s^2 \varepsilon = 0$

dove $\Omega_s(\gamma \gg 1) \simeq \dfrac{h \alpha_c \omega_s e V_0 \cos\phi_s}{2\pi R_s p_s}$ e il guadagno di energia nella cavità RF è dato da $\Delta E = e V_0 \sin\phi_s$.

Riscriviamo $V_0 \cos\phi_s = \dfrac{dV}{d\phi} = \dfrac{dV(t)}{dt}\dfrac{dt}{d\phi(t)} \equiv \dfrac{\dot{V}_0}{\omega_{RF}}$, quindi otteniamo

$$\Omega_s \simeq \frac{\cancel{\omega_{RF}}}{\omega_s}\alpha_c\, \omega_s \frac{e\dot{V}_0}{\cancel{\omega_{RF}}}\frac{1}{2\pi R_s p_s} \underset{\beta=1}{\simeq} e\dot{V}_0 \alpha_c \frac{e}{2\pi R_s}\frac{1}{E_0} \simeq \frac{e\dot{V}_0 \alpha_c}{T_0 E_0}.$$

Introduciamo il termine di SMORZAMENTO dovuto all'emissione di SR nell'unità di tempo, MEDIATA su un GIRO:

$$\frac{1}{T_0}\frac{dU(\varepsilon)}{dt} = \frac{1}{T_0}\frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

e lo inseriamo nell'eq. del moto di cui sopra:

$$\boxed{\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \left(\frac{1}{T_0}\frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{\alpha_c e \dot{V}_0}{T_0 E_0}\right)\varepsilon = 0}$$

Esplicitiamo il COEFF. di SMORZ. LONGIT.:

SR totale emessa in 1 giro

$$\alpha_\varepsilon := \frac{1}{2T_0}\frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{2T_0}\frac{d(A\varepsilon^4)}{d\varepsilon} = \frac{4}{2T_0 E_0}(A\varepsilon^4) = \frac{2U_0}{T_0 E_0}$$

periodo di rivoluzione — energia di riferimento

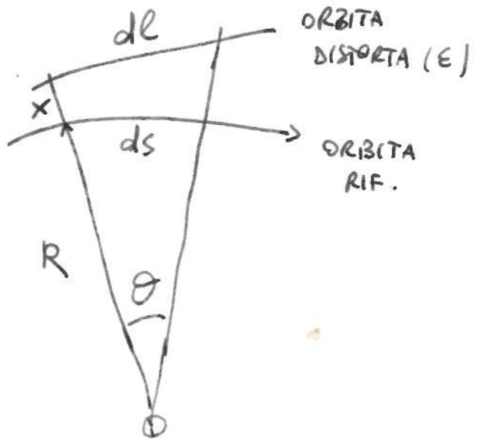
$\Rightarrow$ soluzioni:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = C_1 e^{-\alpha_\varepsilon t}\cos(\Omega_s t + \phi_0) \\ \tau(t) = -C_1\left(\dfrac{\alpha_c}{\Omega_s E_0}\right) e^{-\alpha_\varepsilon t}\,\mathrm{sen}(\Omega_s t + \phi_0) \end{cases}$$

$\tau_\varepsilon := \dfrac{1}{\alpha_\varepsilon} \equiv$ DAMPING TIME.

L'emissione di SR in regime del moto trasverso DISPERSIVO ($D_x, D_x' \neq 0$) determina uno spostamento istantaneo delle particelle su orbite diverse (perturbate) in base alla relazione $x = D_x \frac{\varepsilon}{E_0}$, $\varepsilon = \Delta E$ indotta dalla emissione di SR.
Il coeff. ϑ_E dovrà dunque essere "corretto" tenendo conto del fatto che cariche diverse (ε) seguono curvature diverse, quindi emettono una diversa P_{SR}. Calcoliamo $U(\varepsilon)$ per una generica ε, quindi una generica orbita:

$$U(\varepsilon) \cong \frac{1}{c}\oint P\,dl = \dots$$



$$\theta = \frac{ds}{R} = \frac{dl}{(R+x)} \Rightarrow dl = \left(\frac{R+x}{R}\right) ds = \left(1+\frac{x}{R}\right) ds.$$

Ricordando che $P(E, B_y) = C_1' \frac{E^4}{R^2} = C_1' E^2 B_y^2$,

$[p_z \simeq E \simeq e B_y R]$

troviamo:

$$P(E,B) \simeq P_0 + \frac{dP}{dE}\varepsilon + \frac{dP}{dB_y}\frac{dB_y}{dx} x =$$

$$= P_0 + \frac{2P_0}{E_0}\varepsilon + \frac{2P_0}{B_{0y}} g x =$$

$$= P_0 + \frac{2P_0}{E_0}\varepsilon - 2P_0 \underbrace{kR}\, x .$$

termine di (de-) focalizzazione QUADRUPOLARE integrato nel DIPOLO (magnete "combinato")

$\dots = \frac{1}{c}\oint ds \left(P_0 + \frac{2P_0}{E_0}\varepsilon - 2P_0 kRx\right)\left(1+\frac{x}{R}\right)$ e sostituiamo ora al termine dispersivo $x = D_x \frac{\varepsilon}{E_0}$:

$$\dots = \frac{1}{c}\oint ds \left(P_0 + \frac{2P_0}{E_0}\varepsilon - \frac{2P_0}{E_0} kR D_x \varepsilon\right)\left(1 + \frac{D_x}{E_0 R}\varepsilon\right) \simeq$$

$\simeq$ al solo 1° ORDINE in ε, $\frac{1}{c}\oint ds \left(P_0 + \frac{2P_0}{E_0}\varepsilon + \frac{P_0 D_x}{E_0 R}\varepsilon - \frac{2P_0}{E_0} kR D_x \varepsilon\right)$.

$$\Rightarrow \frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon} \simeq \frac{2P_0 C}{c E_0} + \frac{P_0}{c E_0}\oint ds\, D_x \left(\frac{1}{R} - 2kR\right) =$$

$$= \frac{2\overset{=U_0}{P_0 T_0}}{E_0} + \frac{U_0}{E_0}\frac{1}{cT_0}\oint ds(\dots) = \frac{U_0}{E_0}\left[2 + \frac{1}{C}\oint ds\, D_x\left(\frac{1}{R} - 2kR\right)\right]$$

$$= \frac{U_0}{E_0}\left(2 + \mathcal{D}\right).$$

Otteniamo infine il COEFF. di SMORZ. LONGITUDINALE in presenza di magneti DIPOLI COMBINATI :

$$\boxed{\alpha_\varepsilon := \frac{1}{2T_0}\frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{U_0}{2T_0 E_0}\left(2+\mathcal{D}\right)}$$

$\Rightarrow$ lo smorzamento delle oscillazioni richiede $\mathcal{D} > -2$.

• DAMPING delle osc. di BETATRONE - VERTICALE :

Assumiamo che l'emissione di radiazione avvenga lungo la direzione di moto LONGITUDINALE (istantaneo) t.c. $p_z \to p_z + \delta p_z$, quindi:

$$y' = \frac{p_y}{p_z} \Rightarrow \frac{dy'}{y'} = \frac{dp_z}{p_z} = -\frac{\delta\varepsilon}{E_0}$$

(il segno "-" sta ad indicare un effetto di smorzamento delle ampiezze di bet.)

Consideriamo le COORD. NORM. di FLOQUET :

$$\begin{cases} w_y(\varphi) = \dfrac{y_\beta}{\sqrt{\beta_y}}\cos\varphi_y \\ w_y'(\varphi) = -\dfrac{y_\beta}{\sqrt{\beta_y}}\sin\varphi_y \end{cases} \quad \text{t.c.} \quad w_y^2 + w_y'^2 = \frac{y_\beta^2}{\beta_y} = \varepsilon_y \equiv A_y^2 \ (\text{cost.})$$

Valutiamo la variazione di A_y in seguito all'emissione istantanea di radiazione (in zone NON dispersive) t.c. $\Delta y' \neq 0$, $\Delta y = 0$ (la particella subisce una variazione istantanea di divergenza angolare, non di posizione):

$$A_y dA_y = w_y \underbrace{dw_y}_{0} + w_y' dw_y' = w_y'^2 \frac{dw_y'}{w_y'} = -w_y'^2\frac{\delta\varepsilon}{E_0} ;$$

$$A_y \langle dA_y \rangle_\varphi = -\langle w_y'^2 \rangle_\varphi \frac{\delta\varepsilon}{E_0} = -\frac{1}{2}A_y^2\frac{\delta\varepsilon}{E_0} ;$$

MEDIA su TUTTE le FASI DI BETATRONE

$$-\frac{d}{dt}\frac{\langle dA_y\rangle_\varphi}{A_y} = \frac{d}{dt}\frac{\delta\varepsilon(t)}{2E_0} \simeq \frac{1}{2E_0}\underbrace{\left(\frac{\Delta\varepsilon(t)}{\Delta t}\right)_{giro}}_{\frac{1}{T_0}\int dt\frac{\delta\varepsilon(t)}{dt}} = \boxed{\frac{U_0}{2T_0E_0}} \equiv \alpha_y$$

VARIAZIONE MEDIA in 1 GIRO dell'ampiezza relativa, mediata su tutte le fasi di β_y.

• DAMPING delle OSC. di BETATRONE – ORIZZONTALE :

a differenza del piano verticale non dispersivo, l'emissione di fotoni (dp_z) nel piano orizzontale in presenza di dispersione (Δx) dà origine ad una variazione istantanea della posizione, in aggiunta alla variazione di divergenza angolare: $\Delta x \equiv 0 \Rightarrow \Delta x_\beta + \Delta x_\varepsilon = 0 \Rightarrow \Delta x_\beta(\varepsilon) = -\Delta x_\varepsilon = -D_x \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_0}$

In coordinate di Floquet: $A_x^2 = w_x^2 + w_x'^2$;

$$A_x dA_x = w_x dw_x + w_x' dw_x' = -\left[w_x \frac{D_x}{\sqrt{\beta_x}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_0} + w_x'^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_0}\right].$$

Esplicitiamo $d\varepsilon(x_\beta)$ per una generica orbita di betatrone:

$$\delta\varepsilon(x_\beta) = -\frac{P}{c} dl = \dots \quad \text{dove} \quad \begin{cases} dl \simeq \left(1 + \frac{x_\beta}{R}\right) ds; \\ P \simeq P_0 + \frac{dP}{dB_y}\frac{dB_y}{dx} x_\beta = P_0(1 - 2kRx_\beta); \end{cases}$$

$$\dots \simeq -\frac{P_0}{c}\left(1 + \frac{x_\beta}{R} - 2kRx_\beta\right) ds.$$

(al 1° ORDINE in x_β)

$$\Rightarrow A_x dA_x \simeq +\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{D_x}{\sqrt{\beta_x}} w_x + w_x'^2\right)\frac{P_0}{c}\left(1 + \frac{x_\beta}{R} - 2kRx_\beta\right) ds =$$

$$= \frac{P_0}{c\varepsilon_0}\left(\frac{x_\beta}{\beta_x} D_x + \frac{D_x}{R\beta_x} x_\beta^2 - 2kR\frac{D_x}{\beta_x} x_\beta^2 + w_x'^2 + w_x'^2\left(\frac{x_\beta}{R} - 2kRx_\beta\right)\right) ds$$

$$A_x \langle dA_x \rangle_\varphi = \frac{P_0}{c\varepsilon_0}\left[\frac{D_x}{\beta_x}\left(\frac{1}{R} - 2kR\right)\langle x_\beta^2\rangle_\varphi + \langle w_x'^2\rangle_\varphi\right] ds =$$

$\langle x_\beta \rangle_\varphi = 0$ $\qquad \langle x_\beta^2\rangle_\varphi = \frac{1}{2}A_x^2\beta_x \qquad \langle w_x'^2\rangle_\varphi = \frac{1}{2}A_x^2$

$$= \frac{U_0}{2cT_0\varepsilon_0} A_x^2 \left[1 + D_x\left(\frac{1}{R} - 2kR\right)\right] ds;$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\langle dA_x \rangle_\varphi}{A_x}\bigg|_{turn} \simeq \frac{U_0}{2T_0\varepsilon_0}\frac{1}{C}\left[\oint ds - \oint ds\, D_x\left(\frac{1}{R} - 2kR\right)\right] = \boxed{\frac{U_0}{2T_0\varepsilon_0}(1 - \mathcal{D})} \equiv \alpha_x$$

$\Rightarrow$ lo smorzamento delle oscillazioni orizzontali richiede $\mathcal{D} < 1$.

TEO. di ROBINSON :

$\alpha_i := J_i \frac{U_0}{2T_0\varepsilon_0}$, $i = 1, 2, 3$ coeff. di DAMPING. Allora:

$\boxed{\sum_{i=1}^{3} J_i = 4}$, J_i = numeri di "RIPARTIZIONE".

N.B.: uno smorzamento simultaneo in tutti i piani richiede

$$\boxed{-2 < \mathcal{D} < 1}.$$

$$\begin{cases} w_x := \frac{x_\beta}{\sqrt{\beta_x}} = \sqrt{\varepsilon_x}\cos\varphi \\ w_x'(\varphi) = \frac{dw_x}{d\varphi} = -\sqrt{\varepsilon_x}\sin\varphi \end{cases} \qquad w_x^2 + w_x'^2 = \varepsilon_x = A_x^2$$

ECCITAZIONE QUANTISTICA delle oscillazioni.

Sviluppando la variazione delle ampiezze di oscillazione fino al 2° ordine nelle coord. delle particelle, teniamo conto sia dello SMORZAMENTO ($\sim \delta w$) che della ECCITAZIONE ($\sim (\delta w)^2$).

Ad es., per il MOTO LONGITUDINALE:

in assenza di emissione di radiazione, il moto di SINCROTRONE è descritto da:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = A_\varepsilon \cos(\Omega_s t + \phi_0) \\ \tau(t) = A_\varepsilon \left(\dfrac{\alpha_c}{\Omega_s E_0}\right) \sin(\Omega_s t + \phi_0) \end{cases} \Rightarrow A_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \tau^2\left(\frac{\Omega_s E_0}{\alpha_c}\right)^2 \equiv$$

$$\equiv w_\varepsilon^2 + w_\varepsilon'^2;$$

$$\delta(A_\varepsilon^2) \cong \underbrace{2w_\varepsilon' \delta w_\varepsilon'}_{0} + 2w_\varepsilon \delta w_\varepsilon + \frac{1}{2}(2\delta w_\varepsilon)\delta w_\varepsilon \ldots \text{ dove } \begin{cases} w_\varepsilon = \varepsilon, \\ \delta w_\varepsilon = -u \end{cases}$$

non c'è variazione istantanea della FASE

energia del FOTONE EMESSO

$$\ldots \cong -2\varepsilon u + u^2;$$

$$\frac{d}{dt}\langle\delta(A_\varepsilon^2)\rangle_\varphi\Big|_{\text{turn}} \simeq -2\frac{d}{dt}\langle\varepsilon u\rangle_\varphi + \frac{d}{dt}\langle u^2\rangle_\varphi = -2\frac{d}{dt}\langle\varepsilon \cdot \frac{du}{d\varepsilon}\varepsilon\rangle_\varphi + \frac{d}{dt}\int_0^\infty u^2 n(u)\,du \;(*) =$$

u dipende da ε termine LINEARE

distrib. di energia dei fotoni emessi

$$\cong -\frac{2}{T_0}\frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon}\langle\underbrace{\varepsilon^2}_{A_\varepsilon^2/2}\rangle_\varphi + \frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2\rangle_\gamma =$$

dove per def. $\int_0^\infty n(u)\,du = N_\gamma$ (*)

$$= -\frac{2}{\tau_\varepsilon}A_\varepsilon^2 + \frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2\rangle_\gamma.$$

L'equilibrio mediato su un PERIODO (GIRO) e intorno all'orbita di RIFERIM. impone:

$$\langle\frac{d}{dt}\delta(A_\varepsilon^2)\rangle_R \equiv 0 \Rightarrow \langle A_\varepsilon^2\rangle_R = \frac{\tau_\varepsilon}{2}\langle\frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2\rangle\rangle_R.$$

(*) $$\frac{d}{dt}\langle u^2\rangle_{\varphi s} \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\int u^2 n(u)\,du = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\int u^2 n(u)\,du}{\int n(u)\,du}}_{\langle u^2\rangle_\gamma}\underbrace{\int n(u)\,du}_{N_\gamma} = \frac{dN_\gamma}{dt}\cdot\langle u^2\rangle_\gamma.$$

Segue che lo scarto quadratico medio (RMS) delle energie delle particelle accelerate (ELETTRONI) all'EQUILIBRIO ~~[illegible]~~ è:

$$\frac{1}{E_0^2}\frac{\langle A_E^2\rangle_R}{2} = \sigma_{\gamma,EQ}^2 = \frac{1}{E_0^2}\frac{\tau_E}{4}\left\langle \frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2\rangle_\gamma \right\rangle_R .$$

Sostituiamo:

$$\tau_E = \frac{2E_0 T_0}{J_E U_0} \approx \frac{2E_0}{J_E\langle P\rangle_R},$$

$$\left\langle \frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2\rangle_\gamma \right\rangle_R \approx \frac{55}{24\sqrt{3}}\langle P\, u_c\rangle_R ,$$

$$u_c = \hbar\omega_c = \frac{3}{2}\hbar\frac{c\gamma^3}{R},$$

$$P = \frac{c}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R^2}\beta^4\gamma^4 \quad (\beta\to 1)$$

e otteniamo infine:

$$\boxed{\sigma_{\gamma,EQ}^2 = \frac{55}{32\sqrt{3}}\frac{\hbar}{m_0 c}\frac{\gamma^2}{J_E}\frac{\langle 1/R^3\rangle_R}{\langle 1/R^2\rangle_R} \simeq \underset{\text{ISOMAGN.}}{\simeq} C_q\frac{\gamma^2}{J_E R},}$$

$$C_q := 3.84\cdot 10^{-13}\,m$$

La durata del bunch di elettroni all'equilibrio è:

$$\boxed{\sigma_\tau^2 = \left(\frac{\alpha_c}{\Omega_s E_0}\right)^2\sigma_\gamma^2 E_0^2 \simeq \left(\frac{\alpha_c}{\Omega_s}\right)^2 C_q\frac{\gamma^2}{J_E R} = \frac{C_q}{m_0^2c^4}\frac{\alpha_c T_0}{J_E R}\frac{E_0^3}{eV_0}}$$

La durata del pacchetto di elettroni può essere manipolata con il GRADIENTE in FASE della tensione accelerante $\sim E_{z,0}$, oppure cambiando α_c.

L'eccitazione quantistica nel piano ORIZZONTALE è indotta dall'emissione di fotoni in zona DISPERSIVA, al 2° ordine nell'energia dei fotoni.

Partiamo dalla ampiezza generalizzata di singola particella (in presenza di $D_x, D_x' \neq 0$ tale ampiezza NON è, in generale, un invariante del moto):

$$A_x^2 = \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 = \dots \qquad \begin{cases} x = x_\beta + D_x \frac{\epsilon}{E_0}, \\ x' = x_\beta' + D_x' \frac{\epsilon}{E_0} \end{cases}$$

$$\dots = \underset{\text{INV. di C.-S.}}{A_{x,\beta}^2} + \underbrace{\left(\gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D_x' + \beta_x D_x'^2\right)}_{\equiv H_x(s)}\left(\frac{\epsilon}{E_0}\right)^2 +$$

$$+ 2\left[\gamma_x x_\beta D_x \frac{\epsilon}{E_0} + 2\alpha_x \left(x_\beta D_x \frac{\epsilon}{E_0}\right)\left(x_\beta' D_x' \frac{\epsilon}{E_0}\right) + \beta_x \left(x_\beta' D_x' \frac{\epsilon}{E_0}\right)\right];$$

$$\delta A_x^2 = \delta A_{x,\beta}^2 + \frac{H}{E_0^2}\delta(\epsilon^2) + f(x_\beta u, x_\beta' u);$$

$$\langle \delta A_x^2 \rangle_\varphi = \langle \delta A_{x,\beta}^2 \rangle_\varphi + \frac{H}{E_0^2}\langle u^2 \rangle_\varphi + f\big(\underbrace{\langle x_\beta \rangle_\varphi}_{0}, \underbrace{\langle x_\beta' \rangle_\varphi}_{0}\big).$$

Ricordando che: $\langle \delta A_{x,\beta}^2 \rangle = -\frac{2U_0}{cT_0E_0} A_{x,\beta}^2 \left[1 - D_x\left(\frac{1}{R} - 2kR\right)\right] ds$, troviamo

$$\left.\frac{d}{dt}\langle \delta A_x^2 \rangle_\varphi\right|_{turn} \simeq -\frac{2U_0}{T_0E_0} A_{x,\beta}^2 (1 - \mathcal{D}) + \frac{H}{E_0^2}\frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2 \rangle_\gamma.$$

L'equilibrio nel tempo e in media sull'orbita di RIFERIMENTO impone:

$$\left.\left\langle \frac{d}{dt}\langle \delta A_x^2 \rangle_\varphi \right\rangle_R\right|_{turn} \equiv 0 \Rightarrow \boxed{\langle A_{x,\beta}^2 \rangle_{R,eq} = \frac{\tau_x}{2}\frac{\cancel{H}}{E_0^2}\left\langle H(s)\frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2 \rangle_\gamma \right\rangle_R}$$

L'EMITTANZA GEOMETRICA è per def. $\boxed{\varepsilon_{x,eq} = \frac{\langle A_{x,\beta}^2 \rangle_{R,eq}}{2}}$, quindi:

$$\varepsilon_{x,eq} = \frac{\tau_x}{4E_0^2}\left\langle H \frac{dN_\gamma}{dt}\langle u^2 \rangle_\gamma \right\rangle_R = \underset{\substack{\text{sostituzione} \\ \text{come per } \sigma_{\delta,eq}}}{\dots} = C_q \frac{\gamma^2}{J_x}\frac{\langle H/R^3 \rangle_R}{\langle 1/R^2 \rangle_R} \underset{\text{ISOMAGN.}}{\simeq} C_q \frac{\gamma^2}{J_x}\frac{\langle H \rangle_R}{R_s}.$$

N.B.: le dimensioni del fascio all'EQUILIBRIO sono:

$$\begin{cases} \sigma_{x,eq} = \left.\sqrt{\varepsilon_x \beta_x + (D_x \sigma_\delta)^2}\right|_{eq} \\ \sigma_{x',eq} = \left.\sqrt{\varepsilon_x \gamma_x + (D_x' \sigma_\delta)^2}\right|_{eq} \end{cases}$$

N.B.: $\varepsilon_{x,eq} \sim \frac{H}{R} \sim \frac{D_x^2}{R} \sim \frac{\theta_b^2}{1/\theta} \sim \theta_b^3 \sim \frac{1}{N_b^3}$.

Il fatto che NON esiste DISPERSIONE VERTICALE sembra suggerire che qui l'effetto di eccitazione sia nullo. In realtà, dobbiamo considerare che i FOTONI vengono emessi con PICCOLI ANGOLI VERTICALI rispetto alla direzione del moto delle particelle (trascurato finora!!). L'aumento di ampiezza di oscillazione sarà dunque:

$$\delta A_Y^2 = \beta_Y \theta^2 \frac{u^2}{E_0^2} \leftarrow \begin{array}{l} Y \sim \sqrt{\beta},\ Y' \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \\ w_Y' \sim Y'\sqrt{\beta} \\ \delta A_Y^2 \sim dw_Y'^2 \sim dy'^2 \cdot \beta_Y \end{array}$$

dove vale $\langle u^2 \theta^2 \rangle_\gamma \simeq \langle u^2 \rangle_\gamma \langle \theta^2 \rangle_\gamma \simeq \langle u^2 \rangle_\gamma \frac{1}{2\gamma^2}$. Quindi:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \langle A_Y^2 \rangle_\varphi \right\rangle_R = - \langle A_Y^2 \rangle_\varphi \frac{U_0}{T_0 E_0} + \frac{\beta_Y}{E_0^2} \left\langle \frac{dN_\gamma}{dt} \langle u^2 \rangle_\varphi \frac{1}{2\gamma^2} \right\rangle_R$$

e all'equilibrio:

$$\boxed{\varepsilon_Y = \frac{\langle A_Y^2 \rangle_\varphi}{2} = \frac{C_q}{2J_Y} \frac{\langle \beta_Y / R^3 \rangle}{\langle 1/R^2 \rangle} \underset{\text{ISOMAGN.}}{\simeq} \frac{C_q \langle \beta_Y \rangle}{2R}}$$

Tale valore è tipicamente molto piccolo rispetto a ε_X. Nella realtà, ε_Y è dominata dall'ACCOPPIAMENTO GEOMETRICO tra i piani di moto x, e y, tale per cui:

$$\varepsilon_Y \simeq k\,\varepsilon_X \simeq 0.01\,\varepsilon_X .$$

↳ FATTORE DI ACCOPPIAMENTO

→ SINTESI: "INTEGRALI di RADIAZIONE di SINCROTRONE." (vedi testo).

NOTA 1: la distribuzione 6-D delle particelle nell'acceleratore è così la risultante di un numero molto GRANDE di EMISSIONI di FOTONI che sono INDIPENDENTI l'una dall'altra e che, ciascuna, contribuiscono con PICCOLE PERTURBAZIONI alla variazione dei momenti delle particelle. ⇒ TEO. del LIMITE CENTRALE:

le distribuzioni $\rho(\varepsilon)$, $\rho(x)$, $\rho(y)$ ecc.. sono GAUSSIANE all'EQUILIBRIO

NOTA 2: tali distribuzioni tendono ad occupare tutto lo spazio (fisico o dinamico) accessibile, fino al limite imposto dal moto stabile (camera da vuoto o apertura dinamica o accettanza)
⇒ le code delle gaussiane vengono "tagliate", con conseguente PERDITA GRADUALE di CARICA. La carica si auto-riorganizza all'equilibrio
⇒ VITA MEDIA QUANTISTICA del FASCIO ACCUMULATO.

INTEGRALI di RADIAZIONE DI SINCROTRONE

Le espressioni precedentemente trovate possono essere espresse in funzione di integrali che dipendono esclusivamente dall'ottica del sincrotrone. Assumiamo il contributo principale della radiazione di sincrotrone provenire da DIPOLI (COMBINATI) e QUADRUPOLI. In tal caso definiamo:

$$I_2 = \oint \frac{1}{\rho^2} ds \qquad I_3 = \oint \frac{1}{|\rho^3|} ds$$

$$I_4 = \oint \frac{D}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} - 2k\right) ds \qquad I_5 = \oint \frac{H}{|\rho^3|} ds$$

tale che:

$$U_0 = \text{energy loss per turn} = \frac{e_c^2}{6\pi \varepsilon_0} \gamma^4 I_2$$

Damping partition numbers,
$$\begin{cases} J_x = 1 - \dfrac{I_4}{I_2} \\ J_y = 1 \\ J_\varepsilon = 2 + \dfrac{I_4}{I_2} \end{cases}$$

Damping times:
$$\begin{cases} \tau_x = \dfrac{3T_0}{R\gamma^3} \dfrac{1}{I_2 - I_4} \\ \tau_y = \dfrac{3T_0}{R\gamma^3} \dfrac{1}{I_2} \\ \tau_\varepsilon = \dfrac{3T_0}{R\gamma^3} \dfrac{1}{2I_2 + I_4} \end{cases}$$

Natural horizontal emittance: $\varepsilon_{x_0} = C_q \gamma^2 \dfrac{I_5}{I_2 - I_4} = \dfrac{C_q \gamma^2}{J_x} \dfrac{I_5}{I_2}$

Relative energy spread: $\sigma_\delta^2 = C_q \gamma^2 \dfrac{I_3}{2I_2 + I_4} = \dfrac{C_q \gamma^2}{J_\varepsilon} \dfrac{I_3}{I_2}$

Bunch duration: $\sigma_\tau = \dfrac{\alpha_c}{\Omega_s E_0} \sigma_\varepsilon = \dfrac{\alpha_c}{\Omega_s} \sigma_\delta$