

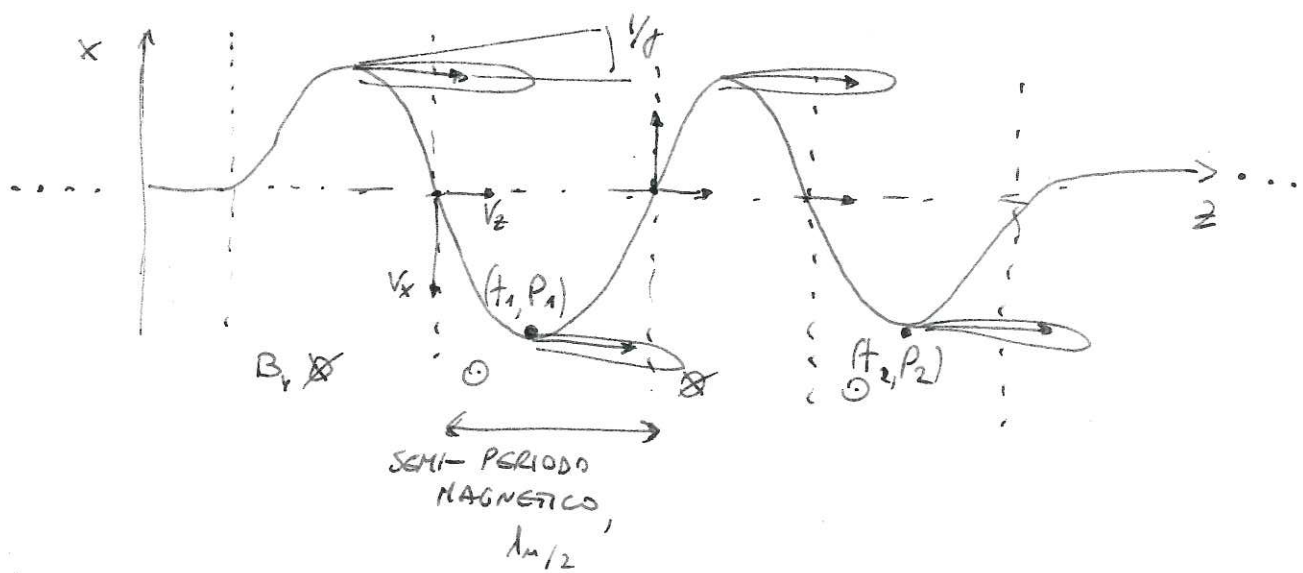


ONDULATORE. LASER AD ELETTRONI LIBERI.

Abbiamo visto come la radiazione di sincrotrone emessa da particelle cariche in magneti dipolari sia caratterizzata da:

- intensità totale / potenza $\propto N_e$, numero di cariche nel fascio: $P_b = \frac{U_0 N}{T_{REV}}$
- ampia larghezza di banda: $\frac{dU}{d\omega} = \frac{U_0}{\omega_c} S(\omega/\omega_c)$, $0 < \omega/\omega_c \leq 10$.

Questo tipo di emissione, inizialmente INDESIDERATA per le cause di perdita di energia del fascio accumulate, fu poi UTILIZZATA per esperimenti di IRRAGGIAMENTO di CAMPIONI ("beam lines") \rightarrow SINCROTRONI di 2^a GENERAZIONE. Degli anni 1980, la BRILIANZA di queste sorgenti di luce è stata aumentata (dN/dt , $1/d\omega$, $\frac{1}{\omega_c^2}$) utilizzando due fasci di elettroni a BASSA EMITTANZA, se element. magnet. caratterizzati da un elevato flusso di radiazione in una banda spettrale molto stretta gli ONDULATORI / WIGGLER. Quest'sono una serie consecutiva di piccoli elementi MAGNETICI DIPOLARI:



La luce emessa è la risultante dell'INTERFERENZA COSTRUTTIVA di "piccoli buccini" successive (sulle scale del periodo λ_m). Maggiore B_y , maggiore è la deflessione delle particelle fuori asse (WIGGLER), determinando un ricco contenuto SPETTRALE (ARMONICHE f della radiazione emessa). Un solo "modulo" di B_y determina una maggiore COLLINEAZIONE e INTERFERENZA COSTRUTTIVA.

• Velocità trasversale indotta da $B_y = B_0 \sin\left(\frac{2\pi v_z t}{\lambda_u}\right)$:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \gamma m_0 a_x = m_0 \gamma \frac{dv_x}{dt} = -e v_z B_y = -e v_z B_0 \sin\left(\frac{2\pi v_z t}{\lambda_u}\right) \\ v_z &\approx \text{const.} \end{aligned} \right\}$$

$$\int_0^{v_x} dv_x' = -\left(\frac{e B_0}{\gamma m_0}\right) v_z \int_0^{x^2} dt' \sin\left(\frac{2\pi z'}{\lambda_u}\right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{e B_0 \lambda_u}{2\pi m_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right);$$

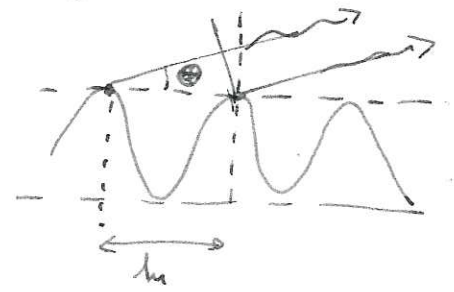
$$\Rightarrow \beta_x = \frac{v_x}{c} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{e B_0 \lambda_u}{2\pi m_0 c}\right) \cos(\dots) \equiv \left(\frac{K}{\gamma}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right)$$

K , parametro dell'ondulatore $= 0.934 B_0 [T] \lambda_u [cm]$

La condizione di interferenza costruttiva in un ondulatore impone che la distanza (ritardo) tra due onde emesse a due punti consecutivi di massima oscillazione della particella sia \equiv lunghezza d'onda (centrale) di osservazione:

$$c \Delta T = c(\Delta t_2 - \Delta t_1) = c \frac{\lambda_u}{v_z} - \lambda_u \cos\theta \equiv \lambda$$

(percorso dell'elettrone da 1 a 2)
(percorso dell'onda lungo θ , da 1 a 2)



Sviluppando per $\gamma \gg 1$: $\frac{1}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}}$, dove $\beta_x = \frac{K}{\gamma} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta_z} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{2} \frac{K^2}{\gamma^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right);$$

$$\Rightarrow \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\lambda \approx \left[1 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) - 1 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}\right] \lambda_u$$

$$\lambda \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2\right)$$

Il significato fisico della dipendenza $\lambda = \lambda(\gamma)$ può essere spiegato in termini di 2 effetti relativistici: I) contrazione delle lunghezze, II) effetto Doppler.

• Trascuriamo l'ondulazione trasversa, $\beta_x \rightarrow 0$

- 1) Il periodo dell'ondulazione nel SR' dell'elettrone è $\lambda'_u = \frac{\lambda_u}{\gamma}$
- 2) Il campo dell'ondulazione è visto in SR' come un'onda e.m. con periodo λ'_u , che incide e rimbalza sull'elettrone (scattering).

3) L'onda emessa dall'elettrone nel SR ha una periodicità (Doppler):

$$\lambda = \gamma \lambda'_u (1 - \beta_z \cos \theta) = \lambda_u (1 - \beta_z \cos \theta) \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \theta^2) \checkmark$$

\uparrow
 osservato ad un
 angolo θ dell'asse

$$\left[\beta_z \rightarrow 1, \left| \theta \sim \frac{1}{\gamma} \ll 1 \right| \right]$$

$$\approx \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\theta^2}{4\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}$$

LARGHEZZA DI BANDA dell'ONDULATORE.

La risonanza dovuta al numero di radiazioni emesse ad angolo elettrone è:

$$\Delta t = \frac{N_u \lambda}{c} \text{ (SUPPORTO)} \Rightarrow \Delta \nu \stackrel{fL}{=} \frac{1}{\Delta t} = \frac{c}{N_u \lambda} \equiv \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)_c = \left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_c = \frac{1}{N_u}$$

Le bw può essere allargata nel caso di: σ_y (elettroni a diverse γ emettono diverse λ), $E_{x,y}$ (elettroni su diverse traiettorie emettono a $\theta \neq 0$ e comprimono diverse $\lambda \Rightarrow$ diverse λ).

DIVERGENZA ANGOLARE dell'ONDULATORE

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{k^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right); \quad d\lambda(\theta^2) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \gamma^2 d(\theta^2);$$

$$\left. \frac{d\lambda}{\lambda}(\theta) \right|_{\theta=0} = \frac{\lambda_u}{2} \frac{2\gamma^2}{\lambda_u \left(1 + \frac{k^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right)} d\theta^2 \equiv \frac{1}{N_u}$$

$$\Rightarrow \left. \sqrt{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1 + k^2/2}{N_u}} \sim \frac{1}{\gamma \sqrt{N_u}}$$

cioè $\ll 1/\gamma$ (rad. surr. da dipolo) quando $N_u \gg 1$.

$$\phi = \frac{dN_{ph}}{dt \frac{d\omega}{\omega_0}} \left[\frac{\#ph}{s. \cdot Q.I. \cdot bw} \right] = \frac{1}{2} \pi \omega N_m \left(\frac{I}{e} \right) \left(\frac{k^2}{1 + \frac{k^2}{2}} \right) m [JJ]_m^2 =$$

cost. struttura
 $f_{ur} = \frac{1}{137}$

numero armonico,
 $\omega_m = m\omega_0$,
 $m \gg 1$

radiazione emessa dall'armonico m
 in un cono angolare

$$\left\| \frac{2\pi \Gamma_{\Omega}^2}{m h \omega} = \frac{\pi \lambda_0}{N_m} = \frac{\pi}{N_m} \frac{(1 + \frac{k^2}{2})}{2m\gamma^2} \right\|$$

Quando si considera l'emissione ^{che include} "basse" armoniche, $m \approx 1$, il fattore $\frac{1}{2}$ scompare, ma il modo trasverso della radiazione non è più approssimabile ad una Gaussiana.

↳ in unità pratiche:

$$\left. \frac{\phi_{tot}}{2\pi \Gamma_{\Omega}^2} \right| = \frac{1}{2} 1.43 \cdot 10^{14} N_m I[A] \left(\frac{k^2}{1 + \frac{k^2}{2}} \right) m [JJ]_m^2$$

$$E_{ph}(\theta=0) [eV] = h\nu_m = 9509 \frac{m E [keV]^2}{\lambda_m [mm] (1 + \frac{k^2}{2})}$$

$$\lambda_m(\theta=0) [mm] = \frac{c}{m\nu_0} = \frac{1241.5}{m E_{ph} [eV]}$$

La componente V_x dell'elettrone "si accoppia" con la componente E_x della radiazione emessa tale da consentire uno SCAMBIO di ENERGIA:

$$\frac{dE}{dt} = + e c \beta_x E_x = e c \left(\frac{k E_{x,0}}{\gamma} \right) \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda_m} \right) \cos \left[2\pi \frac{(z-ct)}{\lambda} + \varphi_0 \right]$$

onda viaggiante

Lo scambio di energia (elettrone \rightarrow radiazione) è costante nel tempo solo se si garantisce un SINCROMISMO tra l'oscillazione di V_x e quella di E_x .

Ciò avviene ad un λ "privilegiato":

$$\cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda_m} \right) \cos \left[2\pi \frac{(z-ct)}{\lambda} + \varphi_0 \right] = \cos \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda_m} + \frac{z}{\lambda} - \frac{ct}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi} \right) \right] + \cos \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda_m} - \frac{z}{\lambda} + \frac{ct}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi} \right) \right]$$

$$\varphi_2 = 2\pi z \left[\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda} + \frac{c}{v_z} \frac{1}{\lambda} \right] + \varphi_0 = 2\pi z \left[\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda \beta_z} (1 - \beta_z) \right] + \varphi_0 =$$

$$\approx 2\pi z \left[\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda 2\beta^2} \right] \approx \left(4\pi \frac{z}{\lambda_m} + \varphi_0 \right), \text{ OSCILLAZIONE VELOCE.}$$

$$\uparrow \text{ dove } \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_{xy}^2} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\gamma} \right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (\rightarrow 1)$$

$$\text{e } \lambda \approx \frac{\lambda_m}{2\gamma^2} (k \rightarrow 0)$$

$$\varphi_1 = 2\pi \left(\frac{z}{\lambda_m} + \frac{z}{\lambda} - \frac{ct}{\lambda} \right) + \varphi_0;$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\beta_z}{\lambda_m} + \frac{\beta_z}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \stackrel{\uparrow}{=} 0; \Rightarrow \frac{\beta_z \lambda + \beta_z \lambda_m - \lambda_m}{\lambda_m} = 0;$$

SINCROMISMO

$$\lambda = \frac{\lambda_m}{\beta_z} (1 - \beta_z) \approx \lambda_m \left(\frac{1}{\beta_z} - 1 \right) \approx$$

$$\approx \lambda_m \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{k^2}{4\gamma^2} - 1 \right) =$$

$$= \boxed{\frac{\lambda_m}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \right)}$$

$\Rightarrow \langle \varphi_2 \rangle_{\lambda_m} \approx 0$ mentre $\langle \varphi_1 \rangle_{\lambda_m} = \text{cost.}$ e la radiazione viene amplificata alla λ centrale dell'emissione spontanea dell'ordine latente, in asse ($\theta=0$).

FEL in REGIME di ALTO GUADAGNO - PARAMETRIZZAZIONE 1-D.

Stimiamo l'andamento dell'intensità della radiazione emessa nell'induttore, $I(z)$.

1) Consideriamo l'accoppiamento $v_x E_x$ ma TRASCURIAMO il moto LONGITUDINALE degli elettroni:

$$\frac{dE}{dt} = h\nu \frac{dI}{dt} \sim \left(\frac{k}{\gamma}\right) E_{x,0}(z) \propto \sqrt{I};$$

↑ emissione INCOERENTE

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{\sqrt{I}} = \int_0^z A dz \Rightarrow I(z) = A I_0 z^2.$$

↑
ELETTRONE SPONTANEA

[N.B.]: in 'emissione SPONTANEA' di oscillatore nel caso $\langle v_x E_x \rangle \approx 0$ implica anche $I(z) \propto z$

2) Consideriamo ora lo spostamento LONGITUDINALE degli elettroni all'interno del bunch, dovuto alla F_x indotta dalla componente $B_y(z)$ della radiazione emessa e in risonanza con gli elettroni

\Rightarrow gli elettroni vengono separati $\leftarrow \rightarrow$ e nasce del loro $\Delta E \propto \pm v_x E_x$ (modulazione in energia) e "impacchettati" a distanze pari a λ (MICRO-BUNCHING):

$$F_z = e v_x B_y^w \propto \left(\frac{k}{\gamma}\right) \sqrt{I}$$

3) Supponiamo ora (dim. e posteriori) che lo scambio di energia in presenza di 1) + 2) sia $\propto F_z$:

$$\frac{dE}{dt} \propto (v_x E_x^w) \cdot (v_x B_y^w) \propto I$$

$$\Rightarrow \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = B \int_0^z dz \Rightarrow I(z) = I_0 e^{z/B}$$

(crescita esp. della potenza lungo l'induttore)

e $1/B :=$ LUNGHEZZA di GUADAGNO, L_g .

↑

verificato sperimentalmente quando l'acceleratore è sufficientemente lungo da permettere una formazione del MICRO-BUNCHING \Rightarrow semplificazione delle interazioni della radiazione (es. SASE)

bisogna trovare la LUNGHEZZA DI GUADAGNO :

$$\langle \frac{d\epsilon}{dt} \rangle_L = e \langle v_x E_x^w \rangle_L = C_1 \frac{k}{\gamma} \sqrt{I(z)} = \frac{C_1}{2} \frac{k}{\gamma} \sqrt{I_0} e^{\frac{z}{2L_g}} ;$$

$$\langle F_z \rangle_L = e \langle v_x B_y^w \rangle_L = C_2 \frac{k}{\gamma} \sqrt{I(z)} = \frac{C_2}{2} \frac{k}{\gamma} \sqrt{I_0} e^{\frac{z}{2L_g}} \equiv \gamma^3 m_0 \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} ;$$

Da cui $\int \int d^2 \Delta z = C_3 \int \int dz^2 \frac{\sqrt{I_0}}{\gamma^3} \frac{k}{\gamma} e^{\frac{z}{2L_g}} ; \quad (v_z \approx \text{const.})$

$$\Delta z(z) = C_3 \sqrt{I_0} \frac{k}{\gamma^4} 4L_g^2 e^{\frac{z}{2L_g}} , \quad \text{è lo spostamento in } z \text{ che genera il MICRO-BUNCHING}$$

Efficienza di "sincrotronamento" :

$$\xi(z) := \frac{i}{\sigma_x \sigma_y} \frac{\Delta z(z)}{\lambda} = C_3 \frac{i}{\sigma_x \sigma_y} \frac{2L_g^2}{\lambda_u} \frac{\sqrt{I_0}}{(1+k^2/2)} \frac{k}{\gamma^4} 4L_g^2 e^{\frac{z}{2L_g}} .$$

$\sim \frac{dQ}{dV}$

Efficienza di amplificazione della radiazione dovuta all'insincrotronamento :

$$\langle \frac{d\epsilon}{dt} \rangle_L = C_4 \frac{i}{\sigma_x \sigma_y} f(k)^2 \frac{I_0 e^{\frac{z}{2L_g}}}{\lambda_u \gamma^3} L_g^2 \propto \frac{dI}{dz} ;$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = C_5 \int_0^L dz \frac{i}{\sigma_x \sigma_y} f(k)^2 \frac{L_g^2}{\lambda_u \gamma^3} ;$$

$$I(z) = I_0 e^{C_5 z \left[\frac{i}{\sigma_x \sigma_y} f(k)^2 \frac{L_g^2}{\lambda_u \gamma^3} \right]} \equiv I_0 e^{\frac{z}{L_g}}$$

è dovuto precedentemente, def. L_g

Da tale uguaglianza ricaviamo L_g :

$$L_g = \gamma \lambda_u^{1/3} \frac{C_6}{\left(\frac{i}{\sigma_x \sigma_y} \right)^{1/3} f(k)^{2/3}} \equiv \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3} P_{FEL}}$$

[partecipano al significato fisico di PFEL...]

da cui ricaviamo :

$$\boxed{P_{FEL} = C_7 \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\lambda_u f(k)}{\sigma_T} \right]^{2/3} i^{1/3}} \sim \frac{\lambda_u}{L_g}$$

LUNGHEZZA di SATURAZIONE (SASE FEL)

La amplificazione esponenziale delle intensità (potenza) del FEL è garantita dal sincronismo $v_x E_z$, $\frac{d\phi_1}{cdt} = \frac{\beta_z}{\lambda_m} + \frac{\beta_z}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \equiv 0$.

Ma non è che gli elettroni perdono risonanza, essi perdono energia e la conseguente variazione di velocità longitudinale (v.g.: $\beta_z = \beta_z(\delta)$ anche tramite $\beta_x \sim k_y$) determina una PERDITA del SINCRONISMO, di fatto

quindi: $\frac{\Delta\beta_z}{\lambda} \equiv \frac{2\pi}{cdt}$, dove Δt è il tempo impiegato a percorrere la lunghezza di saturazione = $\frac{L_{sat}}{\langle v_z \rangle}$.

Dividendo:

$\frac{\Delta\beta_z}{\langle \beta_z \rangle} \approx \frac{2\pi\lambda}{L_{sat}}$ e poiché $\frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} = \frac{1}{\beta_z^2} \frac{\Delta\delta}{f^3}$, otteniamo:

$\frac{\Delta\delta}{\langle \delta \rangle} \Big|_{loss} \approx \pi \frac{2\delta^2 \lambda}{L_{sat} \beta_z^2} \approx \pi \frac{\lambda_m}{L_{sat}}$; moltiplichiamo per $\frac{L_g}{\lambda}$ e otteniamo:

$\frac{\Delta\delta}{\langle \delta \rangle} \Big|_{loss} \approx \left(\frac{\lambda_m}{L_g} \right) \left(\frac{L_g}{L_{sat}} \right) = P_{FEL} \frac{4\pi\sqrt{3}}{L_{sat}}$.

↑ questo è il MAX. σ_δ permesso al fascio di elettroni per mantenere una risonanza del FEL.

Osserviamo che $\frac{\Delta\delta}{\langle \delta \rangle} \Big|_{loss} \approx P_{FEL} \Rightarrow L_{sat} \approx 4\pi\sqrt{3} L_g \approx 22 L_g$.

Ne deduciamo inoltre che $\sigma_{\delta,0}$ (all'entrata dell'acceleratore) deve essere $\ll P_{FEL}$.

Poiché P_{FEL} misura la quantità di energia relativa trasmessa dagli elettroni alla radiazione FEL, essa determina il rapporto delle potenze del fascio di elettroni e di quella FEL a saturazione. Rappresentando:

• $P_{sat} \approx 1.6 P_{FEL} P_b$, $P_b = \frac{iE}{c}$

Dalle def. di λ di risonanza: $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right) \approx \frac{\Delta\omega}{\omega} = 2 \frac{\Delta\delta}{f} \rightarrow 2 P_{FEL}$ → saturazione
 ↳ LARGHEZZA DI BANDA SPETTRALE e SATURAZIONE



In conclusione, il FEL garantisce la stessa RIDOTTA LARGHEZZA di BANNA di un ONDULATORE, ma in aggiunta una INTENSITA' N_c volte maggiore, a parità di I_b ed E .

Tale prestazioni, comunque, richiedono un controllo accurato della qualità del fascio di elettroni.

1) la sovrapposizione spaziale tra fascio di elettroni e fotoni nell'interazione, necessaria al mantenimento dell'interazione, è parametrizzata da:

$$E_{mx} \leq \gamma \frac{\lambda}{4\pi}$$

↙ emissione equivalente per un fascio di fotoni nel limite di diffrazione

2) la condizione di riserbo di energia degli elettroni richiede un piccolo "spread" di energia all'interno del fascio:

$$\sigma_f \ll P_{FEL} \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$$

3) Per facilitare la condizione 2) e allo stesso tempo garantire un'adeguata sequela del FEL, si richiede N_c GRANDE = $\frac{dQ}{dt}$ quindi, per una data CARICA TOTALE Q , un'ELEVATA CORRENTE di PICCO, I_b .