ESERCIZIO 1: REGIME RELATIVISTICO

In letteratura, si intende un corpo essere in regime RELATIVISTICO quando $\gamma > 1$ o, equivalentemente, $T \approx m_0 c^2$. Il regime è detto ULTRA-RELATIVISTICO quando $\gamma >> 1$ o $\beta \to 1$ o $T >> m_0 c^2$.

Si ricorda che $m_e = 0.511\ \mathrm{MeV}/c^2$ (elettrone), $m_p = 938\ \mathrm{MeV}/c^2$ (protone) e $m_n = 939\ \mathrm{MeV}/c^2$ (neutrone)

Si considerino le seguenti specie atomiche, assumendo per semplicità $m_p \approx m_n >> m_e$, caratterizzate dal NUMERO DI MASSA (= numero di NUCLEONI) A. Qual è l'energia cinetica alla quale le specie atomiche entrano nel regime di moto RELATIVISTICO? Qual è il valore β corrispondente?

1) H (idrogeno), $A = 1$
2) He (elio), $A = 4$
3) e (elettrone).

In base alla def. suddetta di regime RELATIVISTICO ($T \approx m_0 c^2$), otteniamo INDIPENDENTEMENTE dalla specie atomica:

$$T \approx m_0 c^2 = 938\ \mathrm{MeV}\ (p),\ 939\ \mathrm{MeV}\ (n),\ 0.511\ \mathrm{MeV}\ (e)$$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{T + m_0 c^2}{m_0 c^2} \equiv \frac{2 m_0 c^2}{m_0 c^2} = 2.$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \underline{0.75}.$$

ESERCIZIO 2: PROTONI ACCELERATI

Un protone è accelerato ad una $T = 200\ \mathrm{MeV}$. Calcolare l'energia totale, la quantità di moto e la velocità.

$$E = T + m_p c^2 = (200 + 938)\ \mathrm{MeV} = 1.138\ \mathrm{GeV}$$

$$pc = \sqrt{T^2 + 2 T m_p c^2} = \sqrt{(200)^2 + 2\,(200 \cdot 938)}\ \mathrm{MeV} = 644.4\ \mathrm{MeV}$$

$$pc = \beta E \Rightarrow \beta = \left(\frac{E}{pc}\right)^{-1} = \left(\frac{1138\ \mathrm{MeV}}{644.4\ \mathrm{MeV}}\right)^{-1} = (1.77)^{-1} = 0.57.$$

ESERCIZIO 3: VITA MEDIA DEI PIONI

Un PIONE è una particella dotata di $m_\pi = 139.6$ MeV/c^2 e che decade in altre particelle (KAONI) con VITA MEDIA $\tau = 26.029$ ns nel SR di QUIETE, in base alla legge: $N_\pi = N_0 \, e^{-t/\tau}$.
Qual è la vita media dei π nel sistema di rif. del laboratorio, se essi vengono accelerati fino ad una $T = 100$ MeV?

$$E = T + m_\pi c^2 = (100 + 139.6)\,\text{MeV} = 239.6\ \text{MeV}$$

$$\gamma = \frac{E}{m_\pi c^2} = \frac{239.6}{139.6} = 1.716 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{lab} = \gamma\tau = 44.674\ \text{ns}.$$

ESERCIZIO 4: LUNGHEZZA DI UN ACCELERATORE LINEARE

Si consideri un LINAC lungo 3 km, caratterizzato da un GRADIENTE ACCELERANTE medio $G = 20$ MeV/m. Elettroni vengono iniettati nell'acceleratore con velocità iniziale $V_i = c/2$. Qual è la lunghezza dell'acceleratore, vista DAGLI ELETTRONI, ancora da percorrere, quando essi hanno raggiunto la sua metà?

$$L'\left(\Delta s_{lab} = L/2\right) = \frac{1}{\gamma_f}\frac{L}{2}$$

$$\gamma_f = \frac{E_f}{m_e c^2}, \quad \text{dove } E_f = E_i + G\frac{L}{2}$$

$$\begin{cases} E_i = \gamma_i m_e c^2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} m_e c^2 = 1.155\, m_e c^2 = 0.590\ \text{MeV} \\ \dfrac{GL}{2} = 20\ \text{MeV/m} \cdot \dfrac{3\ \text{km}}{2} = 30.000\ \text{MeV} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma_f = \frac{(0.590 + 30.000)\,\text{MeV}}{0.511\ \text{MeV}} = 58709.6$$

$$\Rightarrow L' = \frac{1.5\ \text{km}}{58709.6} = 25.6\ \text{mm}.$$

ESERCIZIO 5: PARTICELLA IN CAMPO GRAVITAZIONALE, $\vec{E}$ vs. $\vec{B}$ (E2)

Un protone con $T = 1$ MeV è emesso in direzione parallela alla superficie terrestre. Qual è il RAGGIO di CURVATURA dovuto alla forza GRAVITAZIONALE? Quali sono, rispettivamente, il campo elettrico e il campo induzione magnetica necessari ad ottenere lo stesso raggio? Qual è il rapporto $|\vec{E}|/|\vec{B}|$? È questo rapporto differente per un protone avente $T = 1$ TeV? Perché?

$$m_p g = m_p \frac{v^2}{R}, \qquad g = 9.8\ m/s^2$$

$$E = T + m_p c^2 = 939\ \text{MeV} \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m_p c^2} = \frac{939}{938} = 1.001$$

$$\Rightarrow v = \beta c = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0.045c$$

Quindi: $R = \frac{v^2}{g} = 1.9 \cdot 10^{13}$ m

$$|\vec{F}| = |q\vec{E}| \equiv m_p g \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\overset{\nearrow 1.67\cdot 10^{-27} kg}{m_p}}{\underset{\searrow 1.6\cdot 10^{-19} C}{q}} g = 1.02 \cdot 10^{-7}\ V/m$$

$$|\vec{F}| = |q\vec{v} \times \vec{B}| \equiv m_p g \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{m_p}{q}\frac{g}{v} = \frac{|\vec{E}|}{v} = 7.6 \cdot 10^{-15}\ T$$

In generale, $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = v$. $\qquad |\vec{E}| \simeq 300 \frac{MV}{m} \cdot B[T]$

Quando $T = 1$ TeV $\gg m_p c^2 = 938$ MeV $\Rightarrow v \approx c$.

ESERCIZIO 6: ENERGIA del CM in COLLISORI

$\xrightarrow{m_{01}}$ $(E_T, \vec{p}_T)$ $\quad (m_{02}c^2, 0)$ collisione su BERSAGLIO FISSO

L'energia NEL C.M. del sistema FASCIO + BERSAGLIO è pari alla massa a riposo del sistema nel SR in cui il CM è in QUIETE:

$$M_0 c^2 = \sqrt{E_{tot}^2 - (p_{tot}c)^2} = \sqrt{(E_T + m_{02}c^2)^2 - p_T^2} = \sqrt{(m_{01}c^2)^2 + (m_{02}c^2)^2 + 2E_T m_{02}c^2};$$

Se $E_T \gg m_{01}c^2, m_{02}c^2$, otteniamo: $M_0 c^2 \simeq \sqrt{2E_T m_{02}c^2}$.

$\xrightarrow{1} \quad \xleftarrow{2}$

$$M_0 c^2 = \sqrt{(E_1+E_2)^2 - \underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}_{0} c^4} = \sqrt{(E_1+E_2)^2} \underset{\text{se } E_1 = E_2}{\equiv} 2E_1$$

$$\Rightarrow \boxed{E_T = \frac{2E_1^2}{m_{02}c^2}}$$ per avere la stessa $M_0 c^2$ nel CM.

ESERCIZIO 7: BARRIERA COULOMBIANA.

Nell'esp. di Cockroft-Walton, un acceleratore ELETTROSTATICO viene usato per accelerare PROTONI (IONI IDROGENO) su bersaglio di LITIO, al fine di produrre PARTICELLE α (NUCLEI di IDROGENO):

$$\begin{matrix} A \to \\ Z \to \end{matrix} \; {}^1_1H + {}^7_3Li \to {}^8_4Be \to {}^4_2He + {}^4_2He$$

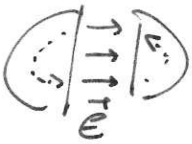
La barriera coulombiana rappresentata dagli elettroni di ${}^7_?Li$ è:

$U(r) = \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Al fine di indurre la reazione, l'energia cinetica dei protoni deve essere: $T_p \geq U(R_{Li})$ dove $R_{Li} = R_0 A(Li)^{1/3}$

$\hookrightarrow 1.2\cdot10^{-15}\,m$

$$\Rightarrow T_p \geq \frac{3e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_{Li}} = 3\cdot10^{-13}\,J = 1.875\,MeV.$$

ESERCIZIO 8: CICLOTRONE DI LORENTZ



$\otimes\vec B$

$$\vec F_L = q(\vec E + \vec v \times \vec B) \to qvB\,\hat a_\perp$$

nelle "Dees"

$qvB = m\omega v = \gamma m_0 \omega v$, per un'orbita stabile

$$\Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{qB}{\gamma m_0}}$$

a seguito di stadi successivi di accelerazione γ aumenta $\Rightarrow$ la stabilità nel piano di deflessione è garantita da:

$\omega_{RF} = \omega(\gamma)$ ~ SINCRO-CICLOTRONE

$B = B(r(\gamma))$ ~ CICLOTRONE A SETTORI

Dalle precedenti uguaglianze otteniamo inoltre (valida per ogni particella carica su DIPOLO MAGNETICO):

$$qvB = \gamma m_0 \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{p = eBR}$$

$p\,[GeV/c] = 0.2998\, B_0\,[T]\, R\,[m]$ nel S.I.

ESERCIZIO 9: CAMPO DI CARICA PUNTIFORME IN MOTO RETTILINEO UNIFORME

Sia q in quiete nel SR'. SR' si muove con $\vec{v} = v_x$ rispetto a SR. q si trova in O' nel SR', e in $X = v_x t$ nel SR. Il campo elettrico di Coulomb in SR' è:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \\ \vec{B}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad E_x' = \frac{q\,x'}{4\pi\varepsilon_0\, r'^3} \;\; \leftarrow \vec{r}'\cdot\hat{x}' \qquad E_y' = \frac{q\,y'}{4\pi\varepsilon_0\, r'^3} \;\; \leftarrow \vec{r}'\cdot\hat{y}'$$

Nel SR risulta (trasformazione dei campi e.m.):

$$E_x = E_x' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma(x-v_xt)}{\left[\gamma^2(x-v_xt)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \sim \frac{1}{\gamma^2}$$

trasf. Lorentz per $\vec{x}$

$$E_y = \gamma(E_y' + v_x \underbrace{B_z'}_{0}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma y}{\left[\gamma^2(x-v_xt)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \sim \frac{1}{\gamma^2}$$

Dall'eq. di $\vec{B}' \equiv 0$ otteniamo: $\vec{B} = \dfrac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2} \sim \dfrac{B}{\gamma^2}$

Inoltre: osserviamo la carica q in SR in $t=0$. Il campo elettrico è

$$\vec{E}_r(t=0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\vec{r}}{(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

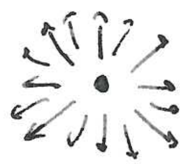
dove possiamo riscrivere, in coordinate polari: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \text{scelgo } z = 0 \end{cases}$,

$$\vec{E}_r(t=0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\vec{r}}{(\gamma^2r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{3/2}} =$$

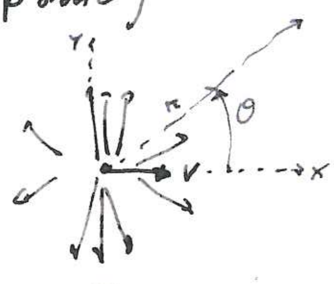
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\vec{r}}{(\gamma^2r^2 - \gamma^2r^2\sin^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\vec{r}}{r^3\left[\sin^2\theta\underbrace{(1-\gamma^2)}_{-\beta^2\gamma^2}+\gamma^2\right]^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\vec{r}}{r^3\gamma^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} =$$

$$= \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{\gamma^2r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}}$$



SR' (SPHERE)



SR (DISC)

CAMPO DI CATTURA ELETTRONICA

(EX1)

L'iniettore di un LINAC è un "cannone elettronico" (GUN) ad "onda viaggiante", caratterizzato da una $f_{RF} = 3\,GHz$ e $v_{ph} = c$. Esso produce elettroni (ad es. per effetto termoionico) ad una energia cinetica iniziale $T_i = 0.1\,MeV$.

Qual è il MINIMO valore del campo elettrico accelerante che ne consente la CATTURA?

$$eE_{z,0} \geq \frac{2\pi m_e c^2}{\lambda_{RF}} \frac{\gamma_0}{1-\beta_0}.$$

$$E = T_i + m_e c^2 = 0.611\,MeV \Rightarrow \gamma_0 = \frac{E}{m_e c^2} = 1.196 \Rightarrow \beta_0 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_0^2}} = 0.548$$

$$\Rightarrow E_{z,0} \geq 85\,MV/m$$

OSCILLAZIONI LONGITUDINALI in un LINAC di PROTONI

Un fascio di protoni è accelerato in un LINAC a partire da una energia cinetica $T_i = 10\,MeV$. Il linac ha un gradiente accelerante (medio) $G = 25\,MV/m$, ed è lungo $L = 30\,m$. Il linac è utilizzato in accelerazione con una fase $\phi_{RF} = \pi/4$, $f_{RF} = 3\,GHz$

Calcolare il numero MINIMO e MASSIMO di oscillazioni longitudinali atteso nell'attraversamento del linac.

Il fascio di p si trova in regime NON- o DEBOLMENTE RELATIVISTICO.

Infatti: $T_i = 10\,MeV \ll m_p c^2 = 938\,MeV$

$$T_f = T_i + eGL = 10\,MeV + 530\,MeV = 540\,MeV < m_p c^2.$$

In particolare: $\gamma_i = \dfrac{T_i + m_p c^2}{m_p c^2} = 1.0107 \Rightarrow \beta_i = 0.145$

$$\gamma_f = \frac{T_f + m_p c^2}{m_p c^2} = 1.58 \Rightarrow \beta_f = 0.774$$

La frequenza angolare di oscillazione longitudinale è:

$$\Omega_s^2 = \left(\frac{2\pi}{T_s}\right)^2 = -\frac{q E_{z0} \sin\phi_s \, \omega_{RF}}{m_p v_s^3} c^2.$$

Il numero di oscillazioni lungo L sarà dato (per $\beta_s = cost$) da: $N_s = \dfrac{\Delta t(L)}{T_s}$.

Il numero MINIMO di $N_s = \check{N}_s$ è atteso per $\beta_s = \beta_f$. Il numero MASSIMO di $N_s = \hat{N}_s$ è atteso per $\beta_s = \beta_i$. In formule:

$$N_s = \frac{\Delta t(L)}{T_s} = \frac{L}{\beta_s c}\frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{L}{2\pi}\frac{1}{\beta_s c}\sqrt{\frac{q\mathcal{E}_{z0}\sin\phi_s\,\omega_{RF}}{m_p\beta_s^3 c^3}c^2} =$$

$$= \frac{L}{2\pi}\frac{1}{\beta_s}\sqrt{\frac{q\mathcal{E}_{z0}\sin\phi_s\,\omega_{RF}}{(m_pc^2)\beta_s^3 c}} =$$

$$= \frac{L}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{q\mathcal{E}_{z0}\sin\phi_s}{m_pc^2\lambda_{RF}}}\cdot\frac{1}{\beta_s^{5/2}}.$$

Otteniamo:

$$\hat{N}_s(\beta_s \equiv \beta_i) = \frac{5.18}{(\beta_i)^{5/2}} \simeq 647 \text{ oscillazioni}$$

$$\check{N}_s(\beta_s \equiv \beta_f) = \frac{5.18}{(\beta_f)^{5/2}} \simeq 8 \text{ oscillazioni}.$$

MOTO IN UN BETATRONE e CONFRONTO CON UN CICLOTRONE.

Si consideri un BETATRONE di raggio massimo $R = 0.7\,m$ e campo magnetico di picco $B_0 = 1\,T$. La frequenza di oscillazione di B_0 nel tempo è $f_R = 10\,Hz$.

Calcolare la massima energia CINETICA raggiungibile nel betatrone, per un ELETTRONE e per un PROTONE.

Nel caso di elettrone, stimare il numero di GIRI necessari al raggiungimento di tale energia cinetica.

Confrontare la massima energia cinetica raggiunta in un CICLOTRONE di analogo raggio, ma $B_0 = 4.6\,T$ (super-conduttivo). Quale dei due sistemi è più vantaggioso per accelerare particelle "pesanti"? Per quale ragione?

BETATRONE.

$p_{z,max} = e\hat{B}_0 R \Rightarrow \hat{p}_z[GeV/c] = 0.3\hat{B}_0[T]R[m] = 0.210\ GeV/c$

La relazione tra T e p_z è: $E = T + m_0c^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$

Trascuro $p_{\perp} \ll p_z$ cosicché $p_z \simeq p$ (totale) e ottengo:

$$T = \sqrt{(p_zc)^2 + (m_0c^2)^2} - m_0c^2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{T}_e(\hat{p}_z) = 209.5\ MeV \\ \hat{T}_p(\hat{p}_z) = 23.2\ MeV \end{cases}$$

(EX2)

In un betatrone, vale la relazione tra campo elettrico nel piano di deflessione e flusso magnetico: $\mathcal{E}_\theta(r) = -r\,\dfrac{dB_z(r)}{dt}$

Stimo per $r = R$: $|\mathcal{E}_\theta(R)| \approx R f_R B_0 = 7\ \mathrm{V/m}$

Il guadagno di energia per giro, sull'orbita di raggio R, è:

$$(\Delta E)_{turn} = e\,\mathcal{E}_\theta(R)\,2\pi R$$

Il numero di giri necessari a raggiungere $\hat{T}_e$ sarà:

$$N_{turn} = \frac{\hat{T}_e}{e\,\mathcal{E}_\theta(R)\,2\pi R} = 6.8 \cdot 10^6$$

Considero ora un CICLOTRONE ($R = 0.7\ \mathrm{m}$, $B_0 = 4.6\ \mathrm{T}$)

$$\hat{p}_z = e B_0 R = 966\ \mathrm{MeV/c}$$

$$\hat{T}_e = \sqrt{(\hat{p}_z c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = 965.5\ \mathrm{MeV} \gg m_e c^2$$, regime ULTRA-RELATIVISTICO

$$\hat{T}_p = \sqrt{(\hat{p}_z c)^2 + (m_p c^2)^2} - m_p c^2 = 408.5\ \mathrm{MeV} \approx m_p c^2$$, regime DEBOLMENTE RELATIV.

In generale : $p_z c \simeq \sqrt{T^2 + 2 m_0 c^2 T}$ $\to \approx \hat{T}_e$; $\to \approx \sqrt{2 m_p c^2 \hat{T}_p}$

Quindi : $\begin{cases} \hat{T}_e \simeq 965.5\ \mathrm{MeV} \\ \hat{T}_p \simeq \dfrac{p_z^2}{2m_p} = 497.4\ \mathrm{MeV} \end{cases}$

Inoltre, $\begin{cases} \hat{T}_e \propto p_z \propto B_0 \\ \hat{T}_p \propto p_z^2 \propto B_0^2 \end{cases}$ $\leftarrow$ Un $B_0 > 1\ \mathrm{T}$ nel CICLOTRONE consente maggiori energie ottenibili a parità di dimensioni dell'accelera- tore R.

SINCROTRONE in RAMPA DI ENERGIA

Il SINCROTRONE "TEVATRON" del FERMILAB (Chicago) è lungo $C = 6$ km ed accelera PROTONI da una energia CINETICA $T_i = 10$ GeV ad una massima $T_f = 400$ GeV. Il NUMERO ARMONICO è $h = 200$.
Si calcoli la variazione della f_{RF} necessaria al mantenimento in orbita fissa dei protoni accelerati da T_i a T_f.

$$f_{RIV} = \frac{\beta_z c}{C} \; ; \quad f_{RF} = h f_{RIV} = \frac{hc}{C}\beta_z \Rightarrow \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} = \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}$$

Poiché sto assumendo $C =$ cost. per ogni valore di $\beta_z(T)$, sto supponendo che B_0 nei dipoli aumenti all'aumentare dell'energia, tale che $R = \frac{p_z}{eB} \equiv$ cost.

$$\gamma_i = \frac{T_i + m_p c^2}{m_p c^2} = 11.7 \Rightarrow \beta_i = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_i^2}} = 0.9963$$

$$\gamma_f = \frac{T_f + m_p c^2}{m_p c^2} = 427.4 \Rightarrow \beta_f = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_f^2}} = 0.9999$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF,i}} = \frac{\Delta\beta_z}{\beta_{z,i}} = 3.7 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Poiché } f_{RF,i} = \underbrace{h f_{RIV,i}}_{\cancel{2\,\text{kHz}}} \Rightarrow \Delta f_{RF}\,(10\text{ GeV} \to 400\text{ GeV})\Big|_{R=\text{cost.}} = \overset{225}{\cancel{36.8}}\ \text{kHz}.$$

OSCILLAZIONI DI SINCROTRONE

Calcolare la frequenza di sincrotrone per il TEVATRON di FNAL ($C = 6$ km) al valore di energia cinetica $T = 10$ GeV. Si consideri $h = 200$, $V_0 \cos\phi_s = 1$ MV ($\phi_s = 0$) e $\gamma_{tr} = 6$.

$$\Omega_s^2 = \frac{h\eta\,\omega_s\,q V_0\cos\phi_s}{2\pi R_s p_s c}\cdot c$$

$$\begin{cases} p_s c = \sqrt{T^2 + 2m_p c^2 T} = 10.9 \text{ GeV} \\ \gamma = \frac{T + m_p c^2}{m_p c^2} = 11.7 \to \beta_s = 0.9963 \\ \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{C}\beta_s c = 0.3 \text{ MHz} \\ \eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} = -0.020 \end{cases}$$

$$\Omega_s = 2.3 \text{ kHz}.$$

SINCROTRONE : RAGGIO DI CURVATURA e GUADAGNO di ENERGIA (EX3)

Si consideri il SINCROTRONE per PROTONI del CERN (PROTO-SINCROTRONE, PS). Il RAGGIO EQUIVALENTE della circonferenza è $R_{eq} = 100$ m. La variazione del campo magnetico DIPOLARE nel tempo, durante l'accelerazione, è $\dot{B} = 2.4\,T/sec$. Il numero TOTALE dei dipoli è 100, ciascuno con LUNGHEZZA MAGNETICA $l_m = 4.4$ m. Il NUMERO ARMONICO è $h = 20$.

Si calcoli il GUADAGNO di ENERGIA per GIRO. Si calcoli la f_{RF} quando $B_0 = 1.23$ T (punto di "estrazione").

Sia R_B il raggio di curvatura nei dipoli, tale che:

$$p_z = e B R_B$$

Se $R_B = $ cost. $\Rightarrow$

$$\frac{dp_z}{dt} = e R_B \dot{B} \Rightarrow (\Delta p_z)_{GIRO} = T_{RIV}\, e R_B \dot{B} = \frac{2\pi R_{eq}}{\beta_z c}\, e R_B \dot{B}$$

Poiché $\Delta p_z \simeq \Delta p \simeq \frac{\Delta E}{\beta_z c}$ $\quad (p_{x,y} \ll p_z)$,

troviamo: $(\Delta E)_{GIRO} = \beta_z c (\Delta p_z)_{GIRO} = 2\pi e R_{eq} R_B \dot{B}$, dove:

$$R_B = \frac{l_m}{\theta_B} = \frac{l_m}{2\pi} \cdot 100 = 70 \text{ m}.$$ Quindi:

$$(\Delta E)_{GIRO} = 31.7 \text{ keV}$$

$$f_{RF} = h f_{RIV} = h \frac{\beta_z c}{2\pi R_{eq}}.$$ Quando $p_z = e B_0 R_B$ @ $B_0 = 1.23$ T

$\Rightarrow p_z = 25.83$ GeV/c

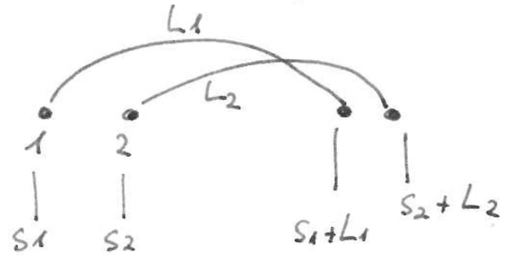
$\Rightarrow \gamma = 27.5$

$\Rightarrow \beta_z = 0.9993$

$$\Rightarrow f_{RF}(1.23\,T) = 9.537 \text{ MHz}.$$

MOMENTUM COMPACTION e COMPRESSIONE di un BUNCH

FERMI è un FEL basato su un acceleratore lineare (di elettroni) nel quale il pacchetto di particelle è COMPRESSO ~~temporalmente~~ di un fattore 10 a partire da una energia del fascio nel compressore magnetico LUNGO $L = 8\,m$ di 230 MeV. Il MOMENTUM COMPACTION del compressore (una chicane acromatica di 4 dipoli) è $+0.01$. Il fascio raggiunge il compressore dopo aver attraversato un LINAC con tensione totale accelerante di PICCO $\Delta\hat{V}_0 = 188\,MV$, alla $f_{RF} = 3\,GHz$.
Mostrare che la lunghezza del pacchetto di elettroni può essere ridotta nel compressore se esiste uno spread di energia nel pacchetto, correlato con la coordinata z interna al pacchetto.
Calcolare la ϕ_{RF} alla quale deve essere operato il LINAC al fine di ottenere un fattore di compressione $CF = 10 \equiv \frac{\sigma_{z,i}}{\sigma_{z,f}}$.



$$\Delta z_i = l_{b,i} = s_2 - s_1$$

$$\Delta z_f = l_{b,f} = (s_2+L_2) - (s_1+L_1) = (s_2 - s_1) + (L_2 - L_1) = l_{b,i} + \Delta L$$

$$\alpha_c := \frac{\Delta L / L_1}{\Delta p_z / p_{z_1}} \quad \text{(assumiamo } p_1 \text{ come riferimento)}.$$

$$l_{b,f} = l_{b,i} + \Delta L = l_{b,i} + \alpha_c L_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1} = l_{b,i} + \alpha_c L_1 \frac{\Delta p}{p_1}$$

Nel LINAC: $\Delta E = e\Delta V_{RF} = e\Delta\hat{V}_0 \cos\phi_{RF} = e\Delta\hat{V}_0 \cos\left(\frac{z}{\lambda_{RF}}\right)$ $\quad (\beta_z \simeq 1)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{p_1} \simeq \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1}{E_1}\frac{dE}{dz}\Delta z = -\frac{l_{b,i}}{E_1}\frac{e\Delta\hat{V}_0}{\lambda_{RF}} \sin\phi_{RF}$$

$$\Rightarrow l_{b,f} = l_{b,i} - l_{b,i}\,\alpha_c L_1 \frac{e\Delta\hat{V}_0 \sin\phi_{RF}}{E_1 \lambda_{RF}} = l_{b,i}\left(1 - \frac{\alpha_c L_1}{\lambda_{RF}} \frac{e\Delta\hat{V}_0 \sin\phi_{RF}}{E_1}\right)$$

Imponiamo $\frac{l_{b,f}}{l_{b,i}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin\phi_{RF} = 0.219 \Rightarrow \phi_{RF} = 12.65°$

DISPERSION FUNCTION.

Show analytically that the dispersion function for a single bending magnet with a bending angle θ seems to emerge from the middle of the magnet with a slope $D_x' = \theta$.

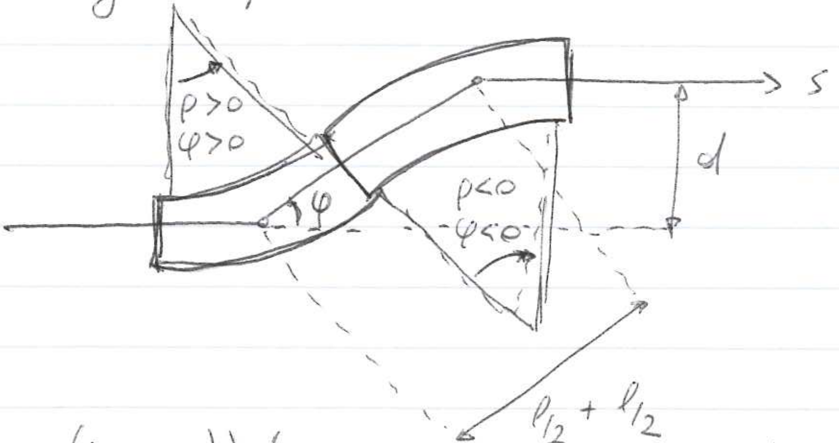
$$M(\text{bending magnet}) = \begin{pmatrix} \times & \times & \rho(1-\cos\theta) \\ \times & \times & 2\,tg(\theta/2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for small θ, $\begin{cases} D_x \simeq \rho\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho\theta\cdot\theta = \frac{\ell}{2}\theta \\ D_x' \simeq 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta \end{cases}$

$\Rightarrow D_x \simeq \frac{1}{2}\ell\theta = \frac{\ell}{2}D_x'$ ~ the resulting dispersion is the the product of a $\ell/2$ drift length for a divergence $= \theta$.

DISPERSION FUNCTION.

A lattice is constituted by two bending magnets ($\varphi \ll 1$) of equal but opposite strength. Such a deflection arrangement causes a parallel displacement of the beam path. Show that in this case the contribution to the dispersion function at the end of the second bending magnet is $\Delta D = -d$ and $\Delta D' = 0$.

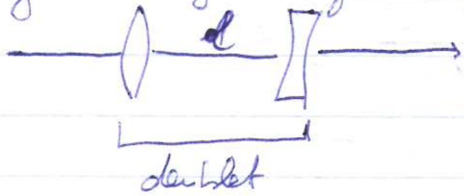


$$M_{tot} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sin\varphi & \rho(1-\cos\varphi) \\ 0 & 1 & 2\,tg\,\varphi/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho\sin\varphi & -\rho(1-\cos\varphi) \\ 0 & 1 & -2\,tg\,\varphi/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & -2\rho\sin\varphi\,tg\,\varphi/2 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta D_x = -2\rho \sin\varphi \, \mathrm{tg}\, \varphi/2 \approx -2\rho \sin\varphi \, \frac{1}{2}\varphi = -\ell \sin\varphi = -d. \\ \Delta D_x' = R_{26} \equiv 0. \end{cases}$$

FODO.

Calculate the focal length of a quadrupole doublet with $|f_{QF}| = |f_{QD}| = 5\,m$ and a distance between the magnets $d = 1\,m$. Which is the advantage from using such an arrangement of magnets?



$$M_{doub} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + l/f & l \\ -l/f^2 & 1 - l/f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f_{doub}} = -\frac{l}{f_q^2} \quad \Rightarrow \quad f_{doub} = 25\ m.$$

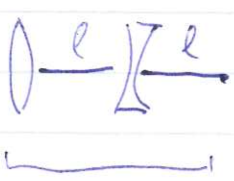
The total focal length is now longer than the focal length of each quadrupole, but the doublet is focusing on both the transverse planes.

FODO.

Calculate the betatron phase advance for a quadrupole doublet with $|f_{QF}| = |f_{QD}| = 5\ m$ and a distance between the magnets $d = 1\,m$. Repeat the calculation for a FODO lattice with $l = 2\ m$. Which is the field gradient required in the two quadrupoles to obtain a phase advance of $\pi/3$ for a proton beam of $p_0 c = 10\ GeV$?

$$M_{doub} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + l/f & l \\ -l/f^2 & 1 - l/f \end{pmatrix}$$

$$\cos \Delta\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(M_{doub}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\mu = \pi \quad \forall l, f.$$



$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - l/f - l^2/f^2 & 2l + l^2/f \\ -l/f^2 & 1 + l/f \end{pmatrix}$$

$$\cos\Delta\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M_{FODO}) = 1 - \frac{\ell^2}{2f^2}.$$

$$f = \frac{1}{k\ell} \Rightarrow \begin{cases} \cos\Delta\mu = 1 - \frac{1}{2}k^2\ell^4 \equiv 0.5 \Rightarrow k = 0.25\ m^{-2} \\ k = \frac{0.3\,g}{p_0}\ [m^{-2}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{k}\, g = 8.33\ T/m.$$

SIMPLETTICITA'. - QUADRUPOLO.

Demonstrate that a quadrupole thick lens matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}$ does not preserve the Courant-Snyder invariant.

Calculate the quadrupole thick lens matrix which preserves the emittance.

An Hamiltonian motion is a succession of canonical transformations. The Jacobian of a canonical transformation is symplectic. Since the determinant of a symplectic matrix is equal to 1 and since the Jacobian expresses the ratio of the phase space hyper-volumes (emittances) before and after the transformation, then the Jacobian of a canonical transformation preserves the emittance.

The Jacobian for a conservative system coincides with the Wronskian determinant of a transport matrix.

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} = 1 - \ell/f \neq 1$$

$\Rightarrow$ emittance is not preserved because the matrix is not symplectic.

The thick lens quadrupole matrix for a symplectic beam transport is given by:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

= product of symplectic matrices = is still symplectic (Group)

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\ell}{2f} & \ell + \frac{\ell^2}{4f} \\ 1/f & 1 + \ell/2f \end{pmatrix};$$

$$\det \tilde{Q} = 1.$$

SIMPLETTICITÀ - SESTUPOLO:

Dimostra che un campo non lineare sestupolare in approssimazione di lente sottile preserva l'invariante di Courant - Snyder. Ripeti la dimostrazione nel caso di lunghezza finita dell'elemento magnetico.

$$1/\rho_{sext} = ml^2 \; [m^{-1}] \Rightarrow M_{sext}(\text{thin lens}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ml^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det M_{sext} = 1.$$

$$M_{sext}(\text{thick lens}) = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ml^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

product of symplectic matrices is still = symplectic (group) =

$$= \begin{pmatrix} 1 + m\frac{l^3}{2} & l + m\frac{l^4}{4} \\ ml^2 & 1 + m\frac{l^3}{2} \end{pmatrix};$$

$$\det M_{sext} = \left(1 + m\frac{l^3}{2}\right)^2 - ml^3 - \frac{1}{4}m^2 l^6 =$$

$$= 1 + \cancel{\frac{1}{4}m^2 l^6} + \cancel{ml^3} - \cancel{ml^3} - \cancel{\frac{1}{4}m^2 l^6} = 1.$$

BETA FUNCTION - DRIFT: ×

Consider a drift space of length 2L. Calculate the behaviour of the β-function along its length. Which is the minimum value of the β-function which minimizes the β-function along the whole drift? How much is the β-function at the drift edges? Is it possible to obtain a phase advance of $\Delta\mu = 3/2\pi$ along the drift space without focusing?

Drift matrix, $D = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix}$

Transport of the Twiss parameters:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS'+SC' & -SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_0$$

$$\Rightarrow \beta(s) = \beta_0 + \frac{(s-s_0)^2}{\beta_0}.$$

For simplicity, set $s_0 = 0$. The value of $\beta(s)$ along $s = -L, \dots, L$ depends on the value of β_0; thus:

$$\left.\frac{d\beta(s,\beta_0)}{d\beta_0}\right|_{s=L} = \left.\left[1 - \frac{s^2}{\beta_0^2}\right]\right|_{s=L} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_0 = L > 0.$$

looking for the minimum

$$\Rightarrow \beta(\pm L) = 2L$$

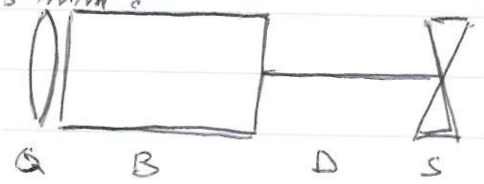
$$\Delta\mu = \int_{-L}^{L} \frac{1}{\beta(s)} ds = 2\arctg\left(\frac{L}{\beta_0}\right) \longrightarrow \pi \text{ when } \frac{L}{\beta_0} \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \Delta\mu_{DRIFT} \leq \pi.$$

con doncel ξ_{com}

CROMATICITÀ CORRETTA - CALCOLO.

Una linea di trasporto ottico è costituita da un quadrupolo seguito da un adiacente dipolo rettangolare e una sezione diritta terminante in un sestupolo. Il gradiente normalizzato del quadrupolo è $K = 1\ m^{-1}$ e la sua lunghezza magnetica è $l = 0.1\ m$, pari a quella del sestupolo. Il dipolo ha un campo magnetico verticale $B_0 = 1\ T$ ed una lunghezza magnetica $L = 0.5\ m$. La funzione di betatrone orizzontale nel quadrupolo vale $\beta_{x,q} = 10\ m$; essa vale $\beta_{x,s} = 5\ m$ nel sestupolo. Calcola il gradiente sestupolare necessario ad annullare la cromaticità lineare ~~vertica~~ orizzontale del reticolo. Assumi la lunghezza della sezione diritta pari a $d = 1\ m$ molto maggiore della lunghezza magnetica dei due multipoli. Quanti sestupoli occorrerebbero nel reticolo per correggere la cromaticità lineare in entrambi i piani trasversi? Il fascio di protoni trasportato nel reticolo ha un'energia totale di 1 GeV. Which is the pole field of the sestupole assuming a bore radius of 15 mm?



$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad \Rightarrow \quad p_p = 346.6\ MeV/c$$

La cromaticità corretta è:

$$\xi_{x,\,corr} = -\frac{1}{4\pi}\int\left[K(s) - m(s)D_x(s)\right]\beta(s)\,ds \cong$$

$$\simeq -\frac{1}{4\pi}\left[K\beta_q l_q - m D_{x,s}\beta_s l_s\right]_x \equiv 0.$$

La dispersione orizzontale nel sestupolo generata dal dipolo è fornita da

$$[D]\cdot[B] = \begin{pmatrix} 1 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho\sin\varphi & \rho(1-\cos\varphi) \\ 0 & 1 & 2\,tg\,\varphi/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \times & \times & \rho(1-\cos\varphi) + 2d\,tg\,\varphi/2 \\ \times & \times & 2\,tg\,\varphi/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{x,s} \simeq \rho(1-\cos\varphi) + 2d\,tg\,\varphi/2 \;;\quad D'_{x,s} = 2\,tg\,\varphi/2 .$$

$$p_0 = \frac{e}{c}B_0\rho \Rightarrow \rho = 1.155\ m.$$

$$\varphi = \text{angolo di curvatura} = \frac{L}{\rho} = 0.433\ rad.$$

$$\Rightarrow D_{x,s} = 0.547$$

$$\Rightarrow m = \frac{K\beta_q l_q}{D_{x,s}\beta_s l_s} = 3.66\ m^{-3}$$

$$m = \frac{0.3\,g'\,[T/m^2]}{p_0\,[GeV/c]} \Rightarrow g' = 4.23\ T/m^2.$$

$$B_{polo} = \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}\right)_{y_0} R^2 = g' R^2 = 9.5\cdot 10^{-4}\ T.$$

DISPERSION - CHROMATICITY CORRECTION.

The machine design of an electron-positron collider foresees a number of super-periods N. A choose for the magnetic lattice of the super-period has to be made between a Double Bending Achromat (DBA) - two identical rectangular bending magnets interleaved by a symmetric quadrupole triplet - and a Triple Bending Achromat (TBA) - three identical rectangular bending magnets interleaved by only a focusing quadrupole in each drift of the achromat. In both the options, the magnetic length of the bending magnets is equal to L. Assuming the quadrupoles between the bending magnets have a negligible contribution to the dispersion function, explain qualitatively which of the two lattices - DBA or TBA - allows in principle to reduce the sextupolar nonlinearities introduced in the achromat to correct the natural (linear) chromaticity.

$$[B] = \begin{pmatrix} \times & \times & \rho(1-\cos\varphi) \\ \times & \times & 2\tg\varphi/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_x \sim \rho(1-\cos\varphi) \underset{\varphi \ll 1}{\approx} \rho\frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{2}L\varphi.$$

$$\text{But} \begin{cases} \varphi_{DBA} = \frac{1}{2}(\text{total bending angle}) = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{N} \\ \varphi_{TBA} = \frac{1}{3}(\quad '' \quad '' \quad) = \frac{1}{3}\frac{2\pi}{N} \end{cases}$$

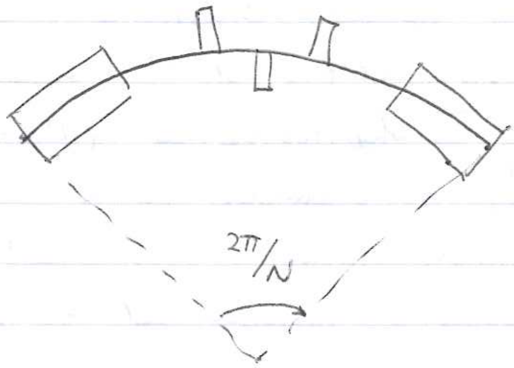
$$\text{Now,} \quad \xi_{x,corr} = -\frac{1}{4\pi}\int \beta(s)\left[k(s) - m(s)D_x(s)\right]ds$$

To reduce the sextupole strength "m" achieving the required value of mD_x, one needs to adopt the larger D_x.

$$\Rightarrow D_{x,DBA} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi L}{N}\right) > D_{x,TBA} \sim \frac{1}{3}\left(\frac{\pi L}{N}\right)$$

$\Rightarrow$ DBA!

DBA :



TBA :