Lezione 1 (10-03-2020)

Spazi di misura e di probabilità

Def 1. Siano S un insieme, $\Sigma \subset \mathcal{P}(S)$; Σ si dice σ-algebra se:

1. $S \in \Sigma$;
2. $A \in \Sigma \Longrightarrow A^c \in \Sigma$;
3. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \Sigma$, allora $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n \in \Sigma$.

Oss 1. Se $\Sigma \subset \mathcal{P}(S)$ è una σ-algebra e se $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \Sigma$, allora $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cap} A_n = \left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n^c\right)^c \in \Sigma$ (per la formula di De Morgan).

Def 2. Una coppia (S, Σ), dove S è un insieme e Σ è una σ-algebra, è detto spazio misurabile. Un elemento di Σ è detto insieme Σ-misurabile.

Def 3. Siano S un insieme, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S)$; si dice σ-algebra generata da $\mathcal{C}$, e si indica con $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersezione di tutte le σ-algebre contenenti $\mathcal{C}$. (Quindi, $\sigma(\mathcal{C})$ è la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{C}$).

Es 1. Sia $S = \mathbf{R}$ e sia $\mathcal{C} = \{A\}$, dove $A = (0, +\infty)$; si ha $\sigma(\mathcal{C}) = \{\varnothing, A, A^c, \mathbf{R}\} = \{\varnothing, (0, +\infty), (-\infty, 0], \mathbf{R}\}$.

Def 4. Sia (S, Σ) uno spazio misurabile; una funzione $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ si dice misura se:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \Sigma$ tale che $A_n \cap A_m = \varnothing \; \forall\, n \neq m$, allora $\mu\left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n)$.

Se inoltre $\mu(S) < +\infty$, μ si dice misura finita.

Def 5. Sia (S, Σ) uno spazio misurabile e sia μ una misura su (S, Σ); allora, la tripla (S, Σ, μ) è detta spazio di misura.

Def 6. Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile; una misura P su $(\Omega, \mathcal{F})$ si dice misura di probabilità (o probabilità) se $P(\Omega) = 1$. In tal caso, la coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ è detta spazio probabilizzabile e la tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è detta spazio di probabilità. Inoltre, Ω è detto spazio campione, un elemento di Ω è detto punto campione, $\mathcal{F}$ è detta famiglia degli eventi ed un elemento di $\mathcal{F}$ è detto evento.

Prop 1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità; si ha:

1. $\forall\, A, B \in \mathcal{F}$ tali che $A \subset B$, si ha $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$; in particolare, $P(A) \leq P(B)$.
2. $\forall\, A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$, $P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n^c\right)$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.
5. $\forall A, B, C \in \mathcal{F}$, $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

Dim.

1. Poiché $B = A\cup(B\backslash A)$, $A\cap(B\backslash A)=\varnothing$, si ha $P(B) = P(A) + P(B\backslash A)$; in particolare, poiché $P(B\backslash A)\geq 0$, si ha $P(A)\leq P(B)$.
2. Si ha $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ (per il punto 1 nel caso $B=\Omega$), da cui $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)^c\right)$ (per il punto 2) $= 1 - P\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n^c\right)$ (per la formula di De Morgan).
4. Si ha $A\cup B = A\cup(B\backslash A)$, $A\cap(B\backslash A)=\varnothing$, da cui $P(A\cup B) = P(A) + P(B\backslash A)$; inoltre, si ha $B = (A\cap B)\cup(B\backslash A)$, $(A\cap B)\cap(B\backslash A)=\varnothing$, da cui $P(B) = P(A\cap B)+P(B\backslash A)$; quindi, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
5. Per il punto 4, si ha

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C) &= P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C)\\ &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P((A\cap C)\cup(B\cap C))\\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Oss 2. Sia $(\Omega,\mathcal{F},P)$ uno spazio di probabilità e siano $A, B\in\mathcal{F}$ tali che $P(B)=0$; allora, $P(A\cup B) = P(A)$.

Dim. Poiché $0\leq P(A\cap B)\leq P(B) = 0$, si ha $P(A\cap B)=0$ e quindi $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)$.

Oss 3. Sia $(\Omega,\mathcal{F},P)$ uno spazio di probabilità e siano $A, B\in\mathcal{F}$ tali che $P(B)=1$; allora, $P(A\cap B) = P(A)$.

Dim. Poiché $1 = P(B)\leq P(A\cup B)\leq 1$, si ha $P(A\cup B)=1$ e quindi $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = P(A)$.

Prop 2. Sia $(\Omega,\mathcal{F},P)$ uno spazio di probabilità; si ha:

1. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{F}$ e $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n\in\mathbf{N}$, allora $P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
2. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{F}$ e $A_n\supset A_{n+1}\ \forall n\in\mathbf{N}$, allora $P\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Dim.

1. Sia la successione $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ tale che $B_0 = A_0$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$; si ha $B_n \cap B_m = \varnothing\ \forall\, n \neq m$; inoltre, $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} B_n = \underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n$; infatti, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, si ha $B_n \subset A_n$ e quindi $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} B_n \subset \underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n$; viceversa, $\forall\, \omega \in \underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n$, si ha $\omega \in B_k$, dove $k = \min\{n \in \mathbf{N} : \omega \in A_n\}$, e quindi $\omega \in \underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} B_n$; dunque, $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} B_n = \underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n$; analogamente, si dimostra che $\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} B_k = A_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Quindi, si ha

$$P\left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n\right) = P\left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} P\left(B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P\left(B_k\right),$$

$$P(A_n) = P\left(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} B_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(B_k\right),$$

da cui $P\left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(A_n\right)$.

2. Sia la successione $\{A_n^c\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$; poiché $A_n^c \subset A_{n+1}^c\ \forall\, n \in \mathbf{N}$, si ha $P\left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cap} A_n\right) = 1 - P\left(\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n^c\right)$ (per la Prop 1-3) $= 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(A_n^c\right)$ (per il punto 1) $= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - P\left(A_n^c\right)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(A_n\right)$ (per la Prop 1-2)

Def 7. Sia (S, τ) uno spazio topologico; la σ-algebra $\sigma(\tau)$ è detta σ-algebra di Borel su S ed è indicata con $\mathcal{B}(S)$; in particolare:

1. Se $(S, \tau) = (\mathbf{R}, \tau_E)$, dove τ_E è la topologia euclidea su $\mathbf{R}$, si indica con $\mathcal{B}$ la σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\tau_E)$.

2. Posto $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si indica con $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ la σ-algebra $\sigma(\tau_E \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\})$.

3. Se $(S, \tau) = \left(\mathbf{R}^n, \tau_E^{(n)}\right)$, dove $\tau_E^{(n)}$ è la topologia euclidea su $\mathbf{R}^n$, si indica con $\mathcal{B}^{(n)}$ la σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \sigma(\tau_E^{(n)})$.

4. $\forall\, A \subset \mathbf{R}$, si indica con $\mathcal{B}(A)$ la σ-algebra $\sigma(\tau_E(A))$, dove $\tau_E(A) = \{A \cap B : B \in \tau_E\}$.

5. $\forall\, A \subset \mathbf{R}^n$, si indica con $\mathcal{B}^{(n)}(A)$ la σ-algebra $\sigma(\tau_E^{(n)}(A))$, dove $\tau_E^{(n)}(A) = \left\{A \cap B : B \in \tau_E^{(n)}\right\}$.

Prop 3. Su $\left(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}\right)$, esiste un'unica misura, indicata con $Leb^{(n)}$, tale che

$$Leb^{(n)}\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

$\forall\, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbf{R}$ tali che $a_i \leq b_i$, $\forall\, i = 1, ..., n$. (Quindi, se $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $Leb^{(n)}$ rappresenta rispettivamente la funzione lunghezza, la funzione area e la funzione volume).

Def 8. La misura $Leb^{(n)}$ definita dalla Prop 3 è detta misura di Lebesgue n-dimensionale; inoltre, $Leb^{(1)}$ è indicata anche con Leb ed è detta misura di Lebesgue; infine, $\forall\, A \subset \mathbf{R}^n$, si indica con $Leb_A^{(n)}$ la restrizione della misura $Leb^{(n)}$ alla σ-algebra $\mathcal{B}^{(n)}(A)$.

Def 9. Sia (S, Σ) uno spazio misurabile e sia $x \in S$; si dice misura delta di Dirac concentrata in x, e si indica con δ_x, la misura di probabilità su (S, Σ) definita da

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}, \ \forall\, A \in \Sigma.$$

Spazi di probabilità discreti e finiti

Def 1. Sia Ω un insieme numerabile e sia P una misura di probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$; allora, la tripla $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ si dice spazio di probabilità discreto. Se in particolare Ω è un insieme finito, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ si dice spazio di probabilità finito.

Def 2. Sia Ω un insieme numerabile; una funzione $f : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ tale che $\sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$ si dice densità discreta su Ω.

Oss 1. Sia Ω un insieme numerabile; se esiste una densità discreta f su Ω, si può definire su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ la seguente misura di probabilità P:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega), \ \forall\, A \subset \Omega. \tag{1}$$

Viceversa, se P è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, esiste la seguente densità discreta f su Ω:

$$f(\omega) = P(\{\omega\}), \ \forall\, \omega \in \Omega. \tag{2}$$

Dim. Se esiste una densità discreta f su Ω, definiamo la funzione $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ come in (1); si ha $P(\varnothing) = \sum\limits_{\omega \in \varnothing} f(\omega) = 0$, $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$; inoltre, se $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tale che $A_n \cap A_m = \varnothing \ \forall\, n \neq m$, allora

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{\omega \in \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} A_n} f(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{\omega \in A_n} f(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{N}} P\left(A_n\right);$$

quindi, P è una misura di probabilità.

Viceversa, se esiste una misura di probabilità P su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, definiamo la funzione $f : \Omega \longrightarrow [0,1]$ come in (2); si ha

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = P(\Omega) = 1;$$

quindi, f è una densità discreta su Ω.

Def 3. Sia Ω un insieme finito; una misura di probabilità P su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si dice uniforme discreta se si ha $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\forall\, \omega \in \Omega$.

Oss 2. Nell'ipotesi della Def 3, $\forall\, A \subset \Omega$, si ha $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili).

Dim. $\forall\, A \subset \Omega$, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.