Lezione 2 (11-03-2020)

Spazi di probabilità discreti e finiti (continuazione)

Def 4. Siano $k, n \in \mathbf{N}^*$, sia $K = \{1, ..., k\}$ e sia $N = \{1, ..., n\}$.

1. Si indica con N^K l'insieme delle funzioni da K in N (quindi, possiamo identificare N^K con N^k).
2. Se $k \leq n$, si indica con D_k^n l'insieme delle funzioni iniettive da K in N, dette disposizioni di k elementi di N (quindi, possiamo identificare D_k^n con l'insieme dei vettori $\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in N^k$ tali che $\omega_i \neq \omega_j$, $\forall\, i \neq j$). Se in particolare $n = k$, D_k^k è l'insieme delle permutazioni di K.
3. Se $k \leq n$, si indica con C_k^n l'insieme dei sottoinsiemi di N di cardinalità k, detti combinazioni di k elementi di N.

Oss 3. Nelle ipotesi della Def 4, si ha:

1. $\left|N^K\right| = n^k$.
2. Se $k \leq n$, $|D_k^n| = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \equiv (n)_k$.
3. Se $k = n$, $\left|D_k^k\right| = k!$.
4. Se $k \leq n$, $|C_k^n| = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Dim 1. Segue dall'identificazione degli insiemi N^K e N^k.Oppure, possiamo osservare che, $\forall\, f \in N^K$, l'immagine mediante f dei k elementi di K può essere scelta in n modi diversi; quindi, $\left|N^K\right| = n^k$.

Dim 2. Se $k \leq n$, $\forall\, f \in D_k^k$, l'immagine mediante f del 1^o elemento di K può essere scelta in n modi diversi; l'immagine mediante f del 2^o elemento di K può essere scelta in $n-1$ modi e così via; poiché $|K| = k$, si ha quindi $|D_k^n| = n(n-1)...(n-k+1) = (n)_k$.

Dim 3. Segue dal punto 2.

Dim 4. Osserviamo che $|C_k^n| \cdot \left|D_k^k\right| = |D_k^n|$; infatti, moltiplicando il numero $|C_k^n|$ dei sottoinsiemi di N di cardinalità k per il numero $\left|D_k^k\right|$ delle permutazioni di un sottoinsieme di N di cardinalità k, si ottiene il numero dei sottoinsiemi ordinati di N di cardinalità k, cioè il numero $|D_k^n|$ delle funzioni iniettive da $\{1, ..., k\}$ in N; si ha quindi

$$|C_k^n| = \frac{|D_k^n|}{\left|D_k^k\right|} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Def 5. Siano $k, n \in \mathbf{N}^*$, sia $K = \{1, ..., k\}$ e sia $N = \{1, ..., n\}$.

1. Se P è la misura di probabilità uniforme discreta su $\mathcal{P}(N^k)$, lo spazio di probabilità $\left(N^k, \mathcal{P}(N^k), P\right)$ si dice campionamento con reimmissione; inoltre, un elemento $\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in N^k$ si dice campione con reimmissione.

2. Se $k \leq n$ e P è la misura di probabilità uniforme discreta su $\mathcal{P}(D_k^n)$, lo spazio di probabilità $(D_k^n, \mathcal{P}(D_k^n), P)$ si dice campionamento senza reimmissione; inoltre, un elemento $\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in D_k^n$ si dice campione senza reimmissione.

Prop 1 (formula del campionamento con reimmissione). Siano $m, k, n \in \mathbf{N}^*$ tali che $m \leq k$, $m \leq n$, e siano $N_1, ..., N_m \subset \{1, ..., n\} \equiv N$ tali che $N_i \cap N_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$, e tali che $|N_i| = n_i \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, i = 1, ..., m$ (quindi, $n_1 + ... + n_m \leq n$); inoltre, siano $R_1, ..., R_m \subset \{1, ..., k\}$ tali che $R_i \cap R_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$, e tali che $|R_i| = r_i \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, i = 1, ..., m$ (quindi, $r \equiv r_1 + ... + r_m \leq k$); allora, se $\left(N^k, \mathcal{P}(N^k), P\right)$ è un campionamento con reimmissione, si ha

$$P\left(\left\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in N^k : \omega_i \in N_j,\, \forall\, i \in R_j,\, \forall\, j = 1, ..., m\right\}\right) = \frac{n_1^{r_1} ... n_m^{r_m}}{n^r}. \tag{1}$$

Dim. La cardinalità dell'insieme $\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in N^k : \omega_i \in N_j, \forall\, i \in R_j, \forall\, j = 1, ..., m\}$ è data da $n_1^{r_1} ... n_m^{r_m} \cdot n^{k-r}$; inoltre, si ha $\left|N^k\right| = n^r \cdot n^{k-r}$; quindi, per l'Oss 2, si ha la formula (1).

Prop 2 (formula del campionamento senza reimmissione). Nelle ipotesi della Prop 1, supponiamo inoltre $k \leq n$; allora, se $(D_k^n, \mathcal{P}(D_k^n), P)$ è un campionamento senza reimmissione, si ha

$$P\left(\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in D_k^n : \omega_i \in N_j,\, \forall\, i \in R_j,\, \forall\, j = 1, ..., m\}\right) = \frac{(n_1)_{r_1} ... (n_1)_{r_m}}{(n)_r}. \tag{2}$$

Dim. Per definizione di D_k^n, la cardinalità dell'insieme $\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_k) \in D_k^n : \omega_i \in N_j, \forall\, i \in R_j, \forall\, j = 1, ..., m\}$ è data dal prodotto di $(n_1)_{r_1} ... (n_1)_{r_m}$ per $(n-r)(n-r-1)...(n-k+1)$; inoltre, si ha $|D_k^n| = (n)_r \cdot (n-r)(n-r-1)...(n-k+1)$; quindi, per l'Oss 2, si ha la formula (2).

Es 1. Sia un'urna costituita da 10 palline: 5 bianche, 3 rosse e 2 nere.

1. Calcolare la probabilità, estraendo con reimmissione 8 palline, che la 3^a e la 5^a estratte siano rosse, la 4^a estratta sia nera e la 7^a estratta sia bianca.

2. Calcolare la probabilità dell'evento definito dal punto 1, nell'ipotesi che l'estrazione sia senza reimmissione.

Soluzione.

1. Con le notazioni della Prop 1, si ha $m = 3$, $k = 8$, $n = 10$, $N_1 = \{\text{palline bianche}\}$, $N_2 = \{\text{palline rosse}\}$, $N_3 = \{\text{palline nere}\}$, $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $R_1 = \{7\}$, $R_2 = \{3, 5\}$, $R_3 = \{4\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = r$, $r = 4$; inoltre, sia P la misura di probabilità uniforme discreta su $\mathcal{P}(N^8)$; la probabilità richiesta è
$$P\left(\left\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_8) \in N^8 : \omega_3 \in N_2,\, \omega_4 \in N_3,\, \omega_5 \in N_2,\, \omega_7 \in N_1\right\}\right)$$
$$= \frac{n_1 n_2^2 n_3}{n^4} = \frac{5 \cdot 3^2 \cdot 2}{10^4} = \frac{9}{1000}.$$
2. Sia P la misura di probabilità uniforme discreta su $\mathcal{P}(D_8^{10})$; con le notazioni precedenti, la probabilità richiesta è
$$P\left(\left\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_8) \in D_8^{10} : \omega_3 \in N_2,\, \omega_4 \in N_3,\, \omega_5 \in N_2,\, \omega_7 \in N_1\right\}\right)$$
$$= \frac{n_1 n_2 (n_2 - 1) n_3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{84}.$$

Probabilità condizionata ad un evento

Oss 1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, sia $H \in \mathcal{F}$ tale che $P(H) > 0$ e sia la funzione $P(\cdot|H) : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ definita da
$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)},\ \forall\, A \in \mathcal{F};$$
allora, $P(\cdot|H)$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dim. Si ha $P(\varnothing|H) = \frac{P(\varnothing)}{P(H)} = 0$; inoltre, se $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ è tale che $A_n \cap A_m = \varnothing\ \forall\, n \neq m$, allora
$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \middle| H\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \cap H\right)}{P(H)} = \frac{P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (A_n \cap H)\right)}{P(H)}$$
$$= \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{P\left(A_n \cap H\right)}{P(H)} = \sum_{n\in\mathbf{N}} P\left(A_n|H\right);$$
infine, $P(\Omega|H) = \frac{P(H)}{P(H)} = 1$.

Def 1. La misura di probabilità definita dall'Oss 1 è detta misura di probabilità (dedotta da P) condizionata ad H.

Prop 1 (formula delle alternative). Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ una partizione di Ω tale che $P(B_n) > 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$; allora, $\forall\, A \in \mathcal{F}$, si ha
$$P(A) = \sum_{n\in\mathbf{N}} P\left(A|B_n\right) P(B_n).$$

Dim. $\forall\, A \in \mathcal{F}$, $P(A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (A \cap B_n)\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} P\left(A \cap B_n\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} P\left(A|B_n\right) P(B_n)$.

Prop 2 (formula di Bayes elementare). Nelle ipotesi della Prop 1, $\forall\, A \in \mathcal{F}$ tale che $P(A) > 0$ e $\forall\, n \in \mathbf{N}$, si ha

$$P(B_n|A) = \frac{P\left(A|B_n\right) P(B_n)}{\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} P\left(A|B_n\right) P(B_n)}.$$

Dim. Per la Prop 1, si ha

$$P(B_n|A) = \frac{P\left(B_n \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(A|B_n\right) P(B_n)}{\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} P\left(A|B_n\right) P(B_n)}.$$

Prop 3. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e siano $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ tali che $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$; si ha allora

$$P(A_1 \cap ... \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_m|A_1 \cap ... \cap A_{m-1}),\ \forall\, 2 \leq m \leq n.$$

Dim. Procediamo per induzione su m. Per $m = 2$ la tesi è vera; supposto che sia vera per $2 \leq m \leq n-1$, per $m+1$ si ha

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap ... \cap A_{m+1}) = P(A_{m+1}|A_1 \cap ... \cap A_m)P(A_1 \cap ... \cap A_m) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_m|A_1 \cap ... \cap A_{m-1})P(A_{m+1}|A_1 \cap ... \cap A_m) \end{aligned}$$

(per l'ipotesi induttiva).

Es 1. Da un'urna contenente b palline bianche e g gialle ne viene estratta una che viene messa da parte senza guardarla. Calcolare la probabilità che la 2^a pallina estratta sia bianca.

Soluzione. Usiamo la formula del campionamento senza reimmissione; si ha $m = 1$, $k = 2$, $n = b + g$, $N_1 = \{\text{palline bianche}\}$, $n_1 = b$, $R_1 = \{2\}$, $r_1 = r = 1$; inoltre, sia P la misura di probabilità uniforme discreta su $\mathcal{P}(D_2^{b+g})$; la probabilità richiesta è

$$P\left(\left\{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in D_2^{b+g} : \omega_2 \in N_1\right\}\right) = \frac{n_1}{n} = \frac{b}{b+g}.$$

Osserviamo che questa è la stessa probabilità di ottenere una pallina bianca alla 1^a estrazione.

Soluzione alternativa. Si ha $P(\omega_1 \in N_1) = \frac{b}{n}$, $P(\omega_1 \in N_1^c) = \frac{g}{n} = \frac{n-b}{n}$, $P(\omega_2 \in N_1|\omega_1 \in N_1) = \frac{b-1}{n-1}$ (poiché dopo la 1^a estrazione di una pallina bianca nell'urna rimangono $n-1$ palline, di cui $b-1$ bianche), $P(\omega_2 \in N_1|\omega_1 \in N_1^c) =$

$\frac{b}{n-1}$ (poiché dopo la 1^a estrazione di una pallina gialla nell'urna rimangono $n-1$ palline, di cui b bianche); quindi, per la Prop 1, si ha

$$P(\omega_2 \in N_1) = P(\omega_2 \in N_1 | \omega_1 \in N_1) P(\omega_1 \in N_1)$$
$$+P(\omega_2 \in N_1 | \omega_1 \in N_1^c) P(\omega_1 \in N_1^c) = \frac{b-1}{n-1} \cdot \frac{b}{n} + \frac{b}{n-1} \cdot \frac{n-b}{n}$$
$$\frac{b^2 - b + nb - b^2}{n(n-1)} = \frac{b}{n} = \frac{b}{b+g}.$$