

Sistemi Dinamici - Introduzione

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy

Email: `mcirafici@units.it`

Dispense per uso interno - da ricontrollare

Indice

1	Alcune considerazioni introduttive	1
2	Sistemi dinamici	2
3	Richiami sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie	7

1 Alcune considerazioni introduttive

La storia della dinamica inizia con Newton (1642-1726ca). Newton stabilì gli aspetti fondanti della teoria delle equazioni differenziali per poter studiare l'evoluzione dei sistemi fisici, in particolare il moto dei corpi celesti. Oggi le equazioni della dinamica ritornano in tantissimi problemi, non necessariamente legati ai quesiti che Newton si poneva: lo studio di fenomeni atmosferici, le equazioni della dinamica delle popolazioni in ecologia, fenomeni di replicazione ed espressione del DNA, fino a problemi concettualmente più profondi come l'evoluzione del nostro Universo, presentano caratteristiche simili.

Il problema ha le seguenti caratteristiche. Un sistema si trova in uno stato iniziale. Agenti esterni, reali o astratti, fanno passare il sistema dallo stato iniziale ad un nuovo stato. Come possiamo formalizzare questo fenomeno? Che tipo di tecniche matematiche abbiamo a disposizione? Che tipo di informazioni possiamo aspettarci di ottenere?

Gli strumenti che abbiamo a nostra disposizione sono le equazioni differenziali, e le equazioni alle differenze per sistemi discreti. In questo corso impareremo ad usare questi strumenti per studiare il problema della dinamica.

Tuttavia in generale non saremo in grado di trovare una soluzione esatta che descriva l'evoluzione del nostro sistema. Fu Poincaré verso la fine del '800 a introdurre un cambio di prospettiva, ponendo l'accento sulle proprietà qualitative, rispetto a quelle quantitative. Invece di cercare una soluzione esplicita (notiamo che avere una soluzione esplicita non è sempre utile, ad esempio se la nostra soluzione ha la forma di pagine e pagine di funzioni speciali), possiamo chiederci quale sarà l'andamento della soluzione nel lontano futuro. Possiamo chiederci se il nostro sistema è *stabile*. Ad esempio se prendiamo il sistema solare, invece di descrivere esplicitamente le orbite di tutti i pianeti, possiamo chiederci se questi rimarranno vicino al Sole, o se ad un certo momento si allontaneranno indefinitamente. Per rendere più preciso il concetto di stabilità, e altre idee correlate, avremo bisogno di adottare una prospettiva geometrica.

Da un punto di vista più concreto, la dinamica di un sistema viene descritta o attraverso equazioni differenziali, o attraverso l'iterazione di mappa (o equazioni alle differenze). Una caratteristica molto importante comune alla maggior parte dei sistemi dinamici è la *non-linearità*, dell'equazione differenziale o della funzione iterata. In questo corso impareremo a trattare alcuni sistemi non-lineari e vedremo che questi necessitano di una propria impostazione concettuale.

Per finire il fenomeno del *chaos*. Parlare di evoluzione caotica per un sistema significa descrivere una situazione in cui il sistema dipende in modo molto sensibile dalle condizioni iniziali (una minima alterazione del problema iniziale può portare a soluzioni che hanno un andamento completamente diverso) e le cui traiettorie "vagano un po' ovunque". Spesso fenomeni caotici hanno *struttura*. Ad

esempio sistemi diversi possono diventare caotici nello stesso modo, o le soluzioni sono associate a figure estremamente ricche dal punto di vista geometrico. Durante il corso cercheremo di avvicinarci a questi fenomeni.

2 Sistemi dinamici

Cominciamo a discutere alcuni aspetti della teoria dei sistemi dinamici, che vedremo più in dettaglio nel seguito.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali autonome

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \quad (2.1)$$

dove $x \in M$, varietà n -dimensionale; in molte applicazioni chiameremo M lo *spazio delle fasi*. Una varietà è uno spazio che localmente è uguale ad \mathbb{R}^n . In particolare nelle vicinanze in ogni punto $x \in M$ possiamo assumere tutte le proprietà di \mathbb{R}^n , e assegnare a M coordinate locali. Se abbiamo due punti vicini, x e y , possiamo chiederci come sono legati i due sistemi di coordinate. Le varietà si dice differenziabile se questi sistemi di coordinate sono legati da trasformazioni differenziabili. In pratica questo significa saper prendere derivate su tutto lo spazio M . In modo simile possiamo avere varietà analitiche, complesse, lisce... Quando lavoreremo con sistemi dinamici continui assumeremo sempre che M sia differenziabile.

I punti di M descrivono lo stato di un sistema, indicizzato da n variabili. Assumiamo quindi che un punto $x \in M$ determini tutte le variabili che ci occorrono per caratterizzare il nostro sistema. La funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ può essere continua, differenziabile, o altro a seconda del contesto. Questa equazione differenziale definisce una legge di evoluzione dipendente da un parametro t , il tempo. Questo parametro può prendere valori in \mathbb{R} o in un intervallo. La legge di evoluzione è

$$\varphi_t : M \rightarrow M \quad (2.2)$$

definita da $x(t) = \varphi_t(x_0)$, che descrive lo stato di sistema al tempo t a partire dalle condizioni iniziali x_0 . Il cambio di notazione è per sottolineare che la funzione $x(t)$ dipende dalla scelta delle condizioni iniziali. La mappa φ_t è una legge astratta che prende il sistema nello stato iniziale x_0 e lo lascia evolvere fino allo stato corrente.

Esempio: il raffreddamento dei corpi. Vediamo un esempio semplice. Consideriamo un corpo, ad una certa temperatura T . Osserviamo empiricamente che se questo corpo si trova in un ambiente a temperatura T^{ext} minore di T , si raffredda cedendo calore all'ambiente circostante. Questo processo avviene tanto più rapidamente quanto è grande la differenza $T - T^{\text{ext}}$. Questo ci porta alla legge (di Newton (1642-1726ca))

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa (T - T^{\text{ext}}). \quad (2.3)$$

Se $T > T^{\text{ext}}$ la temperatura T deve diminuire e pertanto la sua derivata deve essere negativa. Ne concludiamo quindi che $\kappa > 0$. Data una condizione iniziale $T(t = 0) = T_0$, ci aspettiamo che la funzione $T = T(t)$ sia tale da garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione (concetti che

richiameremo tra breve). L'equazione si integra immediatamente

$$T(t) = T^{\text{ext}} + (T_0 - T^{\text{ext}}) e^{-\kappa t}. \quad (2.4)$$

Perché questa equazione differenziale sia utile a descrivere un sistema, dobbiamo sapere cosa è κ . Questo significa andare a misurare κ per il sistema che ci interessa. Tuttavia, in questo corso adotteremo un'impostazione più astratta: considereremo κ come un *parametro*. Questo significa che non vogliamo considerare un oggetto esplicito, ma vorremmo considerare una classe più vasta di problemi, che differiscono per il valore di κ . In particolare, vogliamo poter variare il valore di κ a piacimento, e chiederci come l'evoluzione del nostro sistema dipenda da κ .

In questo esempio abbiamo fatto delle scelte implicite, che sono alla base della modellizzazione. In primo luogo abbiamo dichiarato $T = T(t)$ la nostra *variabile di stato*. Questa è la variabile che caratterizza lo stato del sistema, cioè stiamo assumendo che conoscerla equivale a determinare completamente il sistema almeno per quanto riguarda le domande a cui siamo interessati a rispondere. Abbiamo inoltre assunto che T sia differenziabile, cioè abbiamo dichiarato che appartiene ad un appropriato spazio di funzioni, e funzione solamente del tempo t . In un secondo momento abbiamo introdotto un operatore differenziale $\frac{d}{dt}$ che agisce su questo spazio di funzioni. Il nostro modello consiste quindi in un'equazione differenziale per la variabile di stato che, partendo da dati iniziali, determini l'evoluzione del sistema ad un qualsiasi istante. \square

Esempio: dinamica delle popolazioni Consideriamo il modello di Malthus, proposto nel 1798 per descrivere la crescita di una popolazione. Facciamo le seguenti assunzioni

1. La popolazione è omogenea e tutti gli individui sono uguali. L'unica variabile che descrive lo stato della popolazione è il numero di individui in funzione del tempo: $N = N(t)$. In particolare $N(t)$ non è funzione della distribuzione spaziale della popolazione (questa ipotesi porta a modelli governati da equazioni differenziali ordinarie e non alle derivate parziali).
2. La popolazione è formata da un numero molto grande di individui: possiamo approssimare $N(t)$ con una funzione continua.
3. La popolazione è isolata: non ci sono migrazioni e l'unico modo in cui la popolazione può cambiare è attraverso la nascita e la morte di individui.
4. Le risorse a disposizione della popolazione non vengono influenzate da condizioni esterne né dalla popolazione stessa. In particolare la fertilità $\beta \geq 0$ e la mortalità $\mu \geq 0$ sono indipendenti dal tempo. Durante un lasso di tempo Δt ogni individuo dà nascita in media a $\beta \Delta t$ individui, e ogni individuo ha una probabilità $\mu \Delta t$ di morire.

Quindi, se al tempo t la popolazione consta di $N(t)$ individui, passato un tempo Δt avremo un numero di individui

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \beta \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t). \quad (2.5)$$

Equivalentemente

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \beta N(t) - \mu N(t), \quad (2.6)$$

che nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ determina l'equazione differenziale ordinaria

$$N'(t) = (\beta - \mu) N(t) = r N(t). \quad (2.7)$$

Questa equazione è il *modello di Malthus* e il parametro $r = \beta - \mu$ misura il tasso di crescita della popolazione. Con condizione iniziale $N(0) = N_0$, il modello si integra facilmente a dare

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (2.8)$$

A seconda del segno di $r = \beta - \mu$, la popolazione cresce o si estingue con ritmo esponenziale, o rimane costante se $r = 0$.

Proviamo a rilassare alcune delle ipotesi. Immaginiamo di voler considerare gli effetti che la popolazione ha sul suo stesso habitat. Possiamo considerare il parametro di Malthus r come una funzione del numero di individui nella popolazione $r = r(N)$, ottenendo quindi l'equazione

$$N'(t) = r(N(t)) N(t) \equiv F(N(t)). \quad (2.9)$$

Un esempio tipico di funzione r è quello utilizzato per descrivere l'*effetto logistico*. A parole questo si può descrivere dicendo che siccome le risorse sono limitate, all'aumentare della popolazione l'habitat ha difficoltà a supportare la popolazione e quindi vediamo una diminuzione nella fertilità e un'aumento nella mortalità. Questi effetti sono la conseguenza della competizione *intra-specifica*. Matematicamente:

$$r'(N) < 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} r(N) < 0. \quad (2.10)$$

Il modo più semplice per trattare questo fenomeno è assumere che la fertilità diminuisca e la mortalità aumenti in modo lineare con il numero di individui:

$$\left. \begin{array}{l} \beta(N) = \beta - \tilde{\beta} N \\ \mu(N) = \mu + \tilde{\mu} N \end{array} \right\} \implies r(N) = \beta(N) - \mu(N) = r - \alpha N, \quad (2.11)$$

with $\tilde{\beta}, \tilde{\mu}$ e quindi α costanti non negative. Allora abbiamo l'equazione di Verhulst (1838) (e equazione logistica)

$$N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t), \quad (2.12)$$

con condizione iniziale $N(0) = N_0$. Il parametro $K = r/\alpha$ è detto capacità portante.

Imponiamo la condizione iniziale $N(0) = N_0 \neq K$ (vediamo che per $N(t) = K$ abbiamo una soluzione costante, che possiamo chiamare la soluzione di equilibrio). In questo caso il problema di Cauchy ha la soluzione esplicita

$$N(t) = K \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}}, \quad (2.13)$$

da cui vediamo che nel limite $t \rightarrow +\infty$, $N(t) \rightarrow K$. Questo modello ha un andamento interessante al variare di N_0 e K . \square

Consideriamo uno stato iniziale del sistema e pensiamo di osservarne la sua evoluzione nel tempo:

questa operazione definisce una *traiettoria* o *orbita* del sistema dinamico

$$\Gamma_x = \{\varphi_t(x), \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (2.14)$$

Similmente parliamo di orbita nel futuro o nel passato se $t \geq 0$ o $t \leq 0$.

L'esempio più semplice di un'orbita è un *punto di equilibrio* o *punto critico*, per il quale l'orbita consiste di un punto solo $\Gamma = \{x\}$. Un'orbita periodica invece è una curva chiusa, che possiamo pensare come un'immersione del cerchio, $\gamma : S^1 \rightarrow M$. In particolare un'orbita periodica ha un periodo T , vale cioè $\varphi_T(x) = x$. Orbite possono anche essere aperiodiche, quasi-periodiche o caotiche, come vedremo in seguito.

La generalizzazione del concetto di orbita è quella di un *insieme invariante*, un insieme Λ tale che $\varphi_t(\Lambda) = \Lambda$ per ogni t . In particolare diciamo che un insieme Λ è *invariante in avanti* se $\varphi_t(\Lambda) \subset \Lambda$ per ogni $t > 0$. Questo significa che per tutti i dati iniziali contenuti in $\Lambda \subset M$, l'evoluzione del sistema si manterrà dentro Λ .

La legge di evoluzione φ_t è determinata risolvendo l'equazione differenziale (2.1). Tuttavia è utile utilizzare un approccio più geometrico e definire la legge di evoluzione in astratto, senza far riferimento all'equazioni differenziale.

Definizione 2.15. *Sia M lo spazio delle fasi, dotato di struttura di varietà differenziabile. Un flusso (completo) è una famiglia a un parametro di diffeomorfismi $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tale che*

1. $\varphi_0(x) = x$
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$

La seconda proprietà in particolare dà la struttura di un gruppo additivo alla famiglia di diffeomorfismi. In particolare $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{id}$ e $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. Notiamo in particolare che questa proprietà implica che le traiettorie non si possono intersecare: infatti supponiamo $\varphi_s(x) = \varphi_t(z)$; allora abbiamo che $\varphi_{s+r}(x) = \varphi_{t+r}(z)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$ e le due traiettorie coincidono. Similmente parliamo di *semi-flusso* se abbiamo $t \geq 0$ per il parametro temporale. In questo caso non esiste l'inversa e abbiamo solo la struttura di semi-gruppo.

Da questo punto di vista ogni punto della traiettoria di un sistema dinamico può essere visto come una condizione iniziale.

Dalle proprietà del flusso possiamo ricavare l'equazione differenziale (2.1).

Definizione 2.16. *Un campo vettoriale su M è una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ che ad ogni punto dello spazio delle fasi $x \in M$ associa un vettore $v = x(t)$.*

Il campo vettoriale associato ad un flusso φ è definito da

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0} \quad (2.17)$$

In particolare segue da $\varphi_t(x_0) = x(t)$ che $\varphi_t(x)$ è soluzione del problema ai dati iniziali

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0)) \quad \varphi_0(x_0) = x_0 \quad (2.18)$$

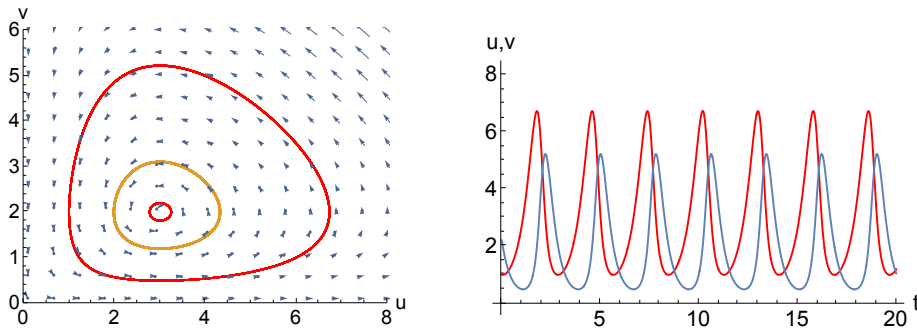


Figura 1: Sinistra: traiettorie e campo vettoriale nel modello di Lotka-Volterra. A destra: andamento periodico delle popolazioni di prede e predatori.

Esempio: il modello di Lotka-Volterra Adesso consideriamo modelli in cui due specie convivono nello stesso habitat e la prima specie u (preda) costituisce la principale risorsa di sostentamento della seconda specie v (predatore). Assumiamo che in assenza di predatori la specie u abbia una crescita Malthusiana, con tasso $r > 0$. D'altra parte senza prede, la specie v si estinguerebbe con un tasso $-\mu < 0$; quindi la sopravvivenza dei predatori dipende dall'abbondanza di prede.

Scriviamo il modello di Lotka-Volterra come

$$\begin{cases} u'(t) = r u(t) - a u(t) v(t) = (r - a v(t)) u(t) \\ v'(t) = -\mu v(t) + \gamma a u(t) v(t) = (-\mu + \gamma a u(t)) v(t) \end{cases}, \quad (2.19)$$

dove il termine $a u(t) v(t)$ conta il numero di prede uccise dai predatori nell'unità di tempo, mentre $\gamma a u(t) v(t)$ è il numero di nuovi predatori nell'unità di tempo. Quest'ultimo termine merita un commento: il parametro γ ha il ruolo di misurare quanto è efficiente il meccanismo di convertire l'uccisione delle prede in nuovi predatori, e agisce come "premio" che incentiva la popolazione di predatori a uccidere più prede. Chiamiamo $d = \gamma a$. Il modello ha senso per $u \geq 0$ e $v \geq 0$. Come esempio riportiamo in figura 2.19 il campo vettoriale ed alcune traiettorie (in questo caso periodiche) del modello, ottenute numericamente. Notiamo la differenza tra studiare l'andamento del sistema nello spazio delle fasi, e studiare l'andamento delle soluzioni u e v in funzione del tempo. \square

Sistemi dinamici a tempo discreto. Possiamo anche assumere che il tempo sia una variabile discreta. In questo caso abbiamo la legge di evoluzione

$$x_{t+1} = \varphi(x_t) \quad (2.20)$$

Equivalentemente possiamo dire che lo stato al tempo t è determinato dallo stato al tempo $t = 0$ dall'iterazione

$$x_t = \varphi^t(x_0) \quad (2.21)$$

Un caso particolare di sistema dinamico a tempo discreto si ottiene da un sistema dinamico a tempo continuo, osservandolo solo a determinati istanti, o quando una variabile assume un particolare valore. Vedremo esempi più avanti.

Esempio: l'equazione logistica discreta. Il modello logistico discreto è dato dalla mappa iterata

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (2.22)$$

con $\lambda > 0$. \square

3 Richiami sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie

Esistenza e unicità. Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine (in *forma normale*) ha la struttura

$$\frac{d}{dt} y(t) \equiv y'(t) = f(t, y(t)) \quad (3.1)$$

dove $(t, y(t)) \in \Omega$, un aperto di \mathbb{R}^2 .

Ad esempio se prendiamo $f(t, y) = ky$, l'equazione $y' = ky$ ha soluzione $y(t) = c e^{kt}$, dipendente da un parametro $c \in \mathbb{R}$. Per fissare questo parametro si impone una condizione iniziale; abbiamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Per il problema di Cauchy vale un teorema di esistenza e unicità locale, a condizione che f sia localmente lipschitziana. Ricordiamo che questo significa che esiste un intorno dove la variazione della funzione f è limitata da un parametro L , come $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. Vale la pena ricordare qual'è il senso di questa ipotesi: il problema di Cauchy è equivalente all'equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (3.3)$$

Il lato destro dell'equazione definisce un operatore $T[y(t)]$. Allora la condizione che f sia Lipschitziana implica che l'operatore T è una contrazione, che per il principio di Banach ha un solo punto fisso $T[y] = y$, soluzione (quindi unica) dell'equazione integrale. Inoltre nelle stesse ipotesi la soluzione dipende in maniera continua dal dato iniziale.

Spesso useremo un'ipotesi più forte e più facile da verificare:

Teorema 3.4. *Sia dato il problema ai dati iniziali*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e supponiamo che f sia di classe C^1 , cioè continua e con derivata continua. Allora esiste $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che possiamo trovare un'unica soluzione $x : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $x(0) = x_0$

Dipendenza continua dai dati iniziali. Nelle applicazioni non ci interessa solamente studiare la soluzione di un'equazione differenziale, ma anche sapere come questa dipende dai dati iniziali. Ad esempio possiamo immaginare che i dati iniziali del nostro problema non siano misurati con precisione elevata, e che quindi ci interessi sapere come evolve il sistema se i dati iniziali fanno parte di un certo insieme. Oppure possiamo essere interessati a studiare ripetutamente l'evoluzione di un sistema al

variare delle condizioni iniziali. Analogamente possiamo avere un problema di ottimizzazione, dove vogliamo capire quali dati iniziali siano ottimali per ottenere un certo risultato.

In questo caso vale il seguente

Teorema 3.6. *Consideriamo il sistema dinamico $x' = f(t, x)$ dove f è di classe C^1 . Allora il flusso $\varphi_t(x)$ è una funzione continua di x .*

Notiamo che abbiamo usato qui la prospettiva che ogni punto può essere considerato una condizione iniziale per il flusso. Il teorema si dimostra studiando soluzioni che partono da dati iniziali diversi ma vicini. Per dimostrare che a dati iniziali vicini corrispondono soluzioni vicine (in un intorno piccolo dell'istante iniziale), si usa la disuguaglianza di Gronwall, che avete visto in Analisi.

Un risultato analogo stabilisce la dipendenza continua dai *parametri*. Supponiamo di avere un sistema dinamico dipendente da un parametro μ , $x' = f_\mu(t, x)$. Allora se f è di classe C^1 anche rispetto a μ (cioè derivando rispetto a μ la derivata è una funzione continua), il flusso è una funzione continua anche rispetto a μ .

Estensione delle soluzioni. Una volta che abbiamo trovato una soluzione locale del problema di Cauchy, il passo successivo è naturalmente quello di cercare soluzioni definite in un intorno più ampio. Risultati di esistenza e unicità globali sono più complicati e interessanti. Ad esempio una condizione che determina esistenza e unicità globali è che la funzione f sia *globalmente* lipschitziana in un dominio Ω , cioè localmente lipschitziana in ogni punto di Ω .

In generale, il problema ai dati iniziali ha un intervallo massimo di esistenza, definito come l'intervallo massimo che include l'istante iniziale t_0 e sul quale la soluzione $x(t)$ esiste ed è unica. Questo intervallo è un aperto di forma $J = (\alpha, \beta)$.

Riduzione a sistemi del primo ordine In maniera analoga possiamo considerare un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.7)$$

dove $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e sono date n funzioni $f_i : \Omega \ni (t, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \mathbb{R}$. Introduciamo i vettori $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $f = (f_1, \dots, f_n)$. Allora possiamo riscrivere il sistema (3.7) come

$$y' = f(t, y) \quad (3.8)$$

formalmente analogo all'equazione differenziale del primo ordine (3.1). Questo sistema si dice *autonomo* se $f = f(y)$, indipendente da t . Dato un $y^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(y^*) = 0$, allora $y(t) = y^*$ è una soluzione di $y' = f(y)$, detta *soluzione di equilibrio*.

Analogamente a quanto visto per l'equazione (3.1), al sistema (3.7) possiamo associare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

dove tutte le quantità sono intese come vettori, e in particolare le condizioni iniziali sono date da $y_i(t_0) = y_{i,0}$.

Consideriamo il caso particolare del sistema (3.7) dato da

$$f_1 = y_2, \quad f_2 = y_3, \quad \dots \quad f_{n-1} = y_n, \quad f_n = f(t, y_1, \dots, y_n). \quad (3.10)$$

In questo caso il sistema diventa equivalente all'equazione differenziale

$$\frac{d^n}{dt^n} y = f \left(t, \frac{d}{dt} y, \frac{d^2}{dt^2} y \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y \right) \quad (3.11)$$

Questa equazione differenziale di ordine n ha n condizioni iniziali, sulla funzione y e tutte le sue derivate fino alla n -esima esclusa.

Viceversa data un'equazione differenziale si può passare ad un sistema di equazioni del primo ordine. Come caso particolare, che sarà molto utile nel seguito, consideriamo l'equazione differenziale $y'' = f(y)$. A questa corrisponde il sistema autonomo

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = f(y) \end{cases} \quad (3.12)$$

Vediamo adesso qualche esempio di equazioni differenziali del primo ordine.

Equazioni separabili. Supponiamo di avere

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x) g(y). \quad (3.13)$$

Questa equazione si dice *separabile* (e nel caso $f(x) = 1$ parliamo di sistema autonomo). La soluzione si ricava da

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C, \quad (3.14)$$

dove C è una costante e abbiamo assunto che la funzione g non si annulli nel dominio di integrazione. Prendiamo ad esempio $y' = 2xy$ con condizione iniziale $y(0) = 2$. Allora

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx 2x + C, \quad (3.15)$$

da cui $\ln |y| = x^2 + C$ che possiamo riscrivere come $y(x) = A e^{x^2}$. Imponendo la condizione iniziale $y(x) = 2 e^{x^2}$

Equazioni lineari. Consideriamo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (3.16)$$

Per risolvere questa equazione scriviamola come una derivata totale

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = \mu(x)q(x). \quad (3.17)$$

Per che scelta di μ questa equazione coincide con (3.16)? Esplicitamente

$$\mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) = \mu(x)q(x). \quad (3.18)$$

Se moltiplichiamo (3.16) per $\mu(x)$ troviamo la condizione su μ

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x) \implies \mu(x) = \exp \int^x p(\zeta)d\zeta. \quad (3.19)$$

Allora la soluzione di (3.16) è data da

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int^x \mu(\zeta)q(\zeta)d\zeta + C \right). \quad (3.20)$$

Vediamo un esempio: $xy' + y = x$ con $x > 0$ e $y(1) = 0$. Se la riscriviamo come

$$y' + \frac{1}{x}y = 1, \quad (3.21)$$

troviamo

$$\mu(x) = \exp \int^x \frac{1}{\zeta}d\zeta = x \quad (3.22)$$

e quindi

$$y = \frac{1}{x} \left(\int^x d\zeta\zeta + C \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}. \quad (3.23)$$

Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti.

Supponiamo di avere un operatore lineare L corrispondente all'equazione differenziale

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = 0 = L[y]. \quad (3.24)$$

Questa equazioni ha soluzioni esponenziali. Prendiamo l'ansatz $y(t) = e^{rt}$. Sostituendo vediamo che il nostro ansatz è effettivamente soluzione se r soddisfa $ar^2 + br + c = 0$. Vediamo ad esempio i seguenti casi

1. Radici reali e distinte: $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.
2. Radici reali e uguali¹: $y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$.
3. Radici complesse coniugate: $r = \alpha \pm i\beta$, $y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$.

Se l'equazione differenziale contiene un termine non omogeneo g , per risolverla dobbiamo sommare una soluzione generale ad una soluzione particolare. Vediamo perché. Adesso la nostra equazione

¹L'intuizione dietro al termine lineare in t viene dal fatto che le due soluzioni devono essere funzionalmente indipendenti, cioè $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ solo quando i coefficienti si annullano. Questo è equivalente a dire che il rapporto y_1/y_2 non è una costante. Quindi l'ansatz più semplice per trovare la seconda soluzione è prendere $y_2 = t y_1$.

è $L[y] = g$. Supponiamo di avere due soluzioni particolari \bar{y}_1 e \bar{y}_2 , cioè $L[\bar{y}_1] = g$ e $L[\bar{y}_2] = g$. Allora per linearità $L[\bar{y}_1 - \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] - L[\bar{y}_2] = 0$ risolve l'equazione omogenea. Allora deve essere $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, e cioè $\bar{y}_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}_2$. A parole ogni soluzione dell'equazione non omogenea ha la forma di una soluzione generale dell'equazione omogeneo più una soluzione particolare.