

MATRICE S

[S.5.1]

Le leggi della **MECCANICA QUANTISTICA** descrivono come un sistema fisico manipola stati in uno SPAZIO DI HILBERT.

Nella teoria quantistica dei campi lo spazio di Hilbert è sostituito dallo **spazio di Fock**: la somma di spazi di Hilbert per stati con numero arbitrario di particelle:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n \leftarrow 2^{\text{nd}} \text{ quantization}$$

Le osservabili sono riconducibili a **PROBABILITA'** di ottenere un certo stato finale a partire da un certo stato iniziale del sistema.

Sono date dal modulo quadro del prodotto interno fra i due stati:

$$dP \sim |\langle f; T_f | i; T_i \rangle|^2 \leftarrow \text{Rappresentazione di Schrödinger: stati evolvono con il tempo}$$

La **TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI** si occupa di calcolare tali ampiezze di scattering per sistemi relativistici.

Stati in e out [17.5.1.2, Sezione .2.7, R.2.1]

Interessandoci principalmente a problemi di scattering, pensiamo di preparare il sistema in uno stato iniziale $|in; T_i\rangle$ (con $T_i \rightarrow -\infty$) e di voler studiare la sua evoluzione nello stato finale $\langle out; T_f|$ (con $T_f \rightarrow +\infty$).

Gli stati a $t = \pm\infty$ sono **STATI ASINTOTICI** e si assume che le interazioni modifichino il sistema in un intervallo di tempo finito.

Assunzioni:

- Gli stati dello **spazio di Fock** sono generati dall'azione di **CAMPI LIBERI** $\phi_{in}(x)$ sullo stato di vuoto (unico e stabile) $|0\rangle$.
- Osservabili fisiche sono espresse in termini di $\phi_{in}(x)$.

L'idea è che l'**interazione** venga **spenta adiabaticamente** per $t \rightarrow \pm\infty$. Questo è il caso per processi di scattering tra pacchetti d'onda ben separati spazialmente.

Gli stati in sono generati a partire dal vuoto $|0\rangle_{in}$

$$|\vec{p}\rangle_{in} = \sqrt{2\omega_p} a^\dagger(\vec{p})_{in} |0\rangle_{in}$$

Stati out sono un'altra rappresentazione della stessa teoria libera. Esiste perciò un isomorfismo che mappa fra i due:

$$S|i\rangle_{out} = |i\rangle_{in} \quad \leftarrow \text{Matrice } S$$

$${}_{out}\langle f|i\rangle_{in} = {}_{in}\langle f|S|i\rangle_{in} \equiv S_{fi}$$

Proprietà della matrice S

- Stabilità del vuoto: $|0\rangle_{out} = |0\rangle_{in} = |0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$
- Stabilità di stati a 1 particella: $|\vec{p}\rangle_{out} = |\vec{p}\rangle_{in} \equiv |\vec{p}\rangle$
- $\phi_{in}(x) = S \phi_{out}(x) S^{-1}$ Possiamo esprimere tutto in termini di stati in

- S è unitaria:

$$\delta_{ji} = {}_{out}\langle j|i\rangle_{out} = {}_{in}\langle j|S S^\dagger|i\rangle_{in} = {}_{in}\langle j|i\rangle_{in} \rightarrow S S^\dagger = 1$$

- S è invariante di Lorentz:

$$\phi_{in}(x') = U \phi_{in}(x) U^{-1} = U S \phi_{out}(x) S^{-1} U^{-1} = U S U^{-1} \phi_{out}(x') U S^{-1} U^{-1}$$

$$L_0 = S \phi_{out}(x') S^{-1}$$

\rightarrow

$$S = U(N) S U(N)^{-1}$$

In esperimenti di scattering le osservabili principali sono **SEZIONI N'URTO** differenziali

$$d\sigma = \frac{1}{T} \frac{1}{\Phi} dP \quad [d\sigma] = \text{L}^2$$

↓
numero di eventi

$$dN = L d\sigma \quad [L] = \text{L}^{-2}$$

L : luminosità integrata

T : durata dell'esperimento
 Φ : flusso normalizzato ad una sola particella

dP : probabilità quantistica:

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} d\tilde{\Pi}_R \quad \text{spazio delle fasi}$$

Nella teoria libera $S = \mathbb{1}$, definiamo quindi

$$S \equiv \mathbb{1} + iT \quad \mathcal{T}: \text{matrice di trasmissione}$$

↓
Unitaria

Fattorizzando la conservazione del momento:

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu) \mathcal{M} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{ELEMENTO DI} \\ \text{MATRICE } \mathcal{M} \end{array}$$

$$\langle f | S - \mathbb{1} | i \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu) \mathcal{M}$$

Nel caso di scattering $2 \rightarrow n$ ($p_1 + p_2 \rightarrow \{p_i\}$)

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\tilde{\Pi}_{\text{LIPS}}$$

$$d\tilde{\Pi}_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum P) \prod_{\text{final state } j} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

↓
Lorentz-invariant phase space

DERIVAZIONE FORMULA SEZIONE D'URTO

[S.5]

$$d\sigma = \frac{1}{T} \frac{1}{\Phi} dP$$

$$\Phi = \frac{|\Delta \vec{v}|}{V} \quad \text{volume}$$

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} d\tilde{\Pi}$$

In un intervallo di dimensione L i momenti sono discretizzati:

$$p_n = \frac{2\pi}{L} n \rightarrow \text{il numero di stati disponibili \(\epsilon\) } N = \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p$$

$$\rightarrow d\tilde{\Pi} = \prod_{\substack{\text{stati} \\ \text{finali} \\ j}} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_j \quad \text{regione dello spazio dei momenti che ci interessa}$$

Dalla normalizzazione $a_k^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} |k\rangle$ per gli operatori di creazione / distruzione

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p-q)$$

$$(2\pi)^3 \delta^3(p) = \int d^3x e^{ipx}$$

$$\hookrightarrow \langle p | q \rangle = (2\pi)^3 (2\omega_p) \delta^3(p-q)$$

$$\int^3 d^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

$$\langle p | p \rangle = 2\omega_p V = 2E_p V$$

$$\left. \begin{aligned} |i\rangle &= |p_1\rangle |p_2\rangle \\ |f\rangle &= \prod_j |p_j\rangle \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \langle i | i \rangle &= (2E_1 V)(2E_2 V) \\ \langle f | f \rangle &= \prod_j (2E_j V) \end{aligned}$$

$$\int^3 d^3(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}$$

per $|f\rangle \neq |i\rangle$

$$|\langle f | S | i \rangle|^2 = \int^3 d^3(0) \int^4 d^4(\Sigma p) (2\pi)^8 |M|^2 = TV (2\pi)^4 \int^4 d^4(\Sigma p) |M|^2$$

$$\Rightarrow dP = \frac{TV (2\pi)^4 \int^4 d^4(\Sigma p)}{(2E_1 V)(2E_2 V)} |M|^2 \prod_j \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{2E_j V} = \frac{T}{V} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} |M|^2 \prod_{\text{LIPS}}$$

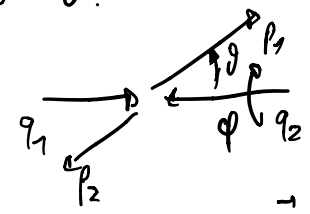
$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP$$

\rightarrow Verificare che \prod_{LIPS} sia invariante di Lorentz

ESERCIZIO SPAZIO DELLE FASI IN DUE PARTICELLE $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

• Nel sistema del centro di massa l'ampiezza può dipendere solamente da $s = (p_1 + p_2)^2 = (q_1 + q_2)^2 = E_{cm}^2$ e l'angolo θ .

$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$



$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$
 $q_1^0 + q_2^0 = E_{cm}$

$$\int d\Omega_{1PS} = \int (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 E_2}$$

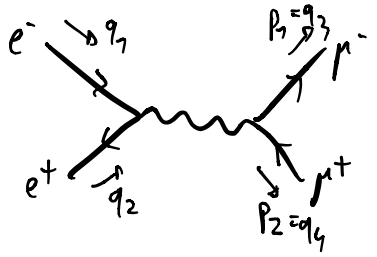
$$= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \delta(E_{cm} - E_1 - E_2) \frac{P^2 dP d\Omega}{E_1 E_2}$$

$$\delta(E_{cm} - \sqrt{P^2 + m_1^2} - \sqrt{P^2 + m_2^2}) \rightarrow P = \frac{E_{cm}}{2} \bar{\beta}, \quad \bar{\beta} \equiv \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{E_{cm}^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{E_{cm}^4}}$$

$$G_0 = \frac{1}{P/E_1 + P/E_2} \delta(P - \frac{E_{cm}}{2} \bar{\beta})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{P^2}{E_1 E_2} \frac{1}{P/E_1 + P/E_2} d\Omega = \frac{d\Omega}{4(2\pi)^2} \frac{P}{E_1 E_2} = \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2P}{E_{cm}} \right) \equiv \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \bar{\beta}$$

• Calcolare $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ dato $|M|^2$ (per energie $\sqrt{s} \gg m_\mu$) [S.13.3.2]



$$\frac{1}{4} \sum_{Spin} |M|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2)$$

$$s = (q_1 + q_2)^2, \quad s + t + u = 0$$

$$t = (q_1 - q_3)^2$$

$$u = (q_1 - q_4)^2$$

Nel sist del centro di massa $q_1 = (E, \vec{k}), q_2 = (E, -\vec{k}), q_3 = (E, \vec{p}), q_4 = (E, -\vec{p})$

$$s = E_{cm}^2 = 4E^2, \quad t = -2E^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{p}, \quad u = -2E^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{p} = -2E^2(1 + \cos\theta) \quad |\vec{k}| = |\vec{p}|$$

$$\frac{2(t^2 + u^2)}{s^2} = \frac{1}{8E^4} (4E^4 - 8E^2(\vec{k} \cdot \vec{p}) + 4(\vec{k} \cdot \vec{p})^2 + 4E^4 + 8E^2(\vec{k} \cdot \vec{p}) + 4(\vec{k} \cdot \vec{p})^2) = 1 + \cos^2\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_{cm}^2} (e^4(1 + \cos^2\theta)) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{8\pi} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} (1 + \cos^2\theta) \quad \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta$$

Integrating in the angular variables
$$\sigma_0 = \frac{4\pi \alpha^2}{3 E_{cm}^2}$$

TEORIA ASINTOTICA [12.5.7.2, Se. 2.7]

- Lo spazio di Fock \bar{e} è generato dai campi liberi $\phi_{in}(x)$
- Tutte le osservabili, incluso il campo quantistico $\phi(x)$ sono espresse in termini dei $\phi_{in}(x)$.
- Le interazioni sono spente adiabaticamente per $t \rightarrow \pm\infty$.

Il campo libero $\phi_{in}(x)$ è riconducibile al campo quantistico $\phi(x)$ nel limite $x_0 \rightarrow -\infty$ a meno di una costante:

$$\phi(x) \xrightarrow{x_0 \rightarrow -\infty} Z_{in}^{1/2} \phi_{in}(x)$$

Analogamente $\phi(x) \xrightarrow{x_0 \rightarrow +\infty} Z_{out}^{1/2} \phi_{out}(x)$

Questo è un LIMITÈ DEBOLE: solo per elementi di matrice.
Infatti per tutti i campi:

$$[\phi(x), \dot{\phi}(x)] = [\phi_{in/out}(x), \dot{\phi}_{in/out}(x)] = i \delta^3(x-y) \quad \text{ma} \quad Z_{in/out} \neq 1$$

I campi asintotici soddisfano Klein-Gordon:

$$(\square + m^2) \phi_{in/out}(x) = 0$$

interazione
↓

$$[\text{invece } (\square + m^2) \phi(x) = j(x)]$$

$$\rightarrow \phi_{in/out}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left(a(\vec{p})_{in/out} e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})_{in/out} e^{+ipx} \right) \quad (1)$$

$$[a(\vec{p})_{in/out}, a^\dagger(\vec{q})_{in/out}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

$$px = p^\mu x_\mu = \omega_p x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

$$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Per il campo interagente $(\square + m^2) \phi(x) \neq 0$, vediamo il caso dell'ampiezza $\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle$

$$\phi(x) = e^{i\hat{p}x} \phi(0) e^{-i\vec{p}x} \quad \leftarrow \text{invarianza per traslazioni}$$

$$\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = \underbrace{\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle}_{\rightarrow \text{indipendente da } t} e^{-ipx} \quad \rightarrow \text{Soddisfa Klein-Gordon}$$

$$\rightarrow (\square_x + m^2) \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle (-p^2 + m^2) = 0$$

Invertendo la (1): $a(\vec{p})_{in/out} = i \int_t d^3x \underbrace{\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_p}}}_{h_p(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_{in/out}(x),$
 $h_p(x) \rightarrow (\square + m^2) h_p(x) = 0$

dove $\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 = \overset{\rightarrow}{\partial}_0 - \overset{\leftarrow}{\partial}_0$, e indipendente da t.

Anche $A \equiv \int_t d^3x h_p(x) \overset{\leftarrow}{\partial}_0 \langle 0 | \phi(x) | p \rangle$ e^- indipendente da t

per ogni $h_p(x)$ tale che $(\square + m^2) h_p(x) = 0$

In quanto $\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle$ soddisfa Klein-Gordon.

$$\begin{aligned} \partial_0 A &= \int d^3x \partial_0 [h_p \overset{\leftarrow}{\partial}_0 \langle \phi(x) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \overset{\leftarrow}{\partial}_0 h_p] = \\ &= \int d^3x (h_p \overset{\leftarrow}{\partial}_0^2 \langle \phi(x) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \overset{\leftarrow}{\partial}_0^2 h_p) = \\ &\stackrel{\text{Klein Gordon}}{\rightarrow} = \int d^3x (h_p (\overset{\leftarrow}{\nabla}^2 - m^2) \langle \phi(x) \rangle - \langle \phi(x) \rangle (\overset{\leftarrow}{\nabla}^2 - m^2) h_p) \quad (\square + m^2) = (\overset{\leftarrow}{\nabla}^2 - \nabla^2 + m^2) \\ &\stackrel{\text{by part}}{\rightarrow} = \int d^3x (h_p \overset{\leftarrow}{\nabla}^2 \langle \phi(x) \rangle - h_p \overset{\leftarrow}{\nabla}^2 \langle \phi(x) \rangle) = 0 \end{aligned}$$

Per $\langle 0 | \phi_{in/out}(x) | p \rangle = e^{-ipx}$ ← esercizio: verificare

Prendiamo il limite di A per $t \rightarrow \pm\infty$, con A indep da t .

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_t d^3x h_p(x) \overset{\leftarrow}{\partial}_0 \langle 0 | \phi(x) | p \rangle = \langle 0 | \phi | 0 \rangle \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_t d^3x h_p(x) \overset{\leftarrow}{\partial}_0 (e^{-ipx})$$

t -indep.

$$\mathcal{Z}_{out/in}^{\frac{1}{2}} \int_t d^3x h_p(x) \overset{\leftarrow}{\partial}_0 \langle 0 | \phi_{out/in}(x) | p \rangle = \mathcal{Z}_{out/in}^{\frac{1}{2}} \int_t d^3x h_p(x) \overset{\leftarrow}{\partial}_0 (e^{-ipx})$$

Si ha che necessariamente $\mathcal{Z}_{in} = \mathcal{Z}_{out} \equiv \mathcal{Z} = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$

$$\Rightarrow \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = \mathcal{Z}^{1/2} e^{-ipx} \quad |\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle|^2 = \mathcal{Z}$$

A causa delle interazioni $\phi(x)$ genera anche stati a più particelle quindi ci si aspetta $|\zeta| \leq 1$. $|\zeta|$: prob di $\phi(x)$ di generare stati a 1 particella.

Rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann [S.29.2]

Considera la funzione a due punti $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$
 Inseriamo un INSIEME COMPLETO DI STATI A ENERGIA POSITIVA

$$\mathbf{1} = \sum_x \int d\tilde{\pi}_x |x\rangle \langle x|, \quad d\tilde{\pi}_x = \prod_{j \in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \sum_x \int d\tilde{\pi}_x \langle 0 | \phi(x) | x \rangle \langle x | \phi(y) | 0 \rangle =$$

$$= \sum_x \int d\tilde{\pi}_x \langle 0 | e^{i\hat{p}_x} \phi(0) e^{-i\hat{p}_x} | x \rangle \langle x | e^{i\hat{p}_y} \phi(0) e^{-i\hat{p}_y} | 0 \rangle =$$

$$= \sum_x \int d\tilde{\pi}_x e^{-i p_x (x-y)} |\langle 0 | \phi(0) | x \rangle|^2$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p (x-y)} \left\{ \sum_x \int d\tilde{\pi}_x (2\pi)^4 \delta^4(p - p_x) |\langle 0 | \phi(0) | x \rangle|^2 \right\}$$

Il termine tra parentesi è scalare: può solo dipendere da p^2 e ha supporto su stati fisici: $p_x^2 \geq 0$, $p_x^0 > 0$ quindi

$$\sum_x \int d\vec{x} (2\pi)^4 \delta^4(p-p_x) |\langle 0 | \phi(0) | x \rangle|^2 \equiv 2\pi \delta(p^0) \rho(p^2)$$

↑
FUNZIONE SPETTRALE

$$\Rightarrow \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \delta(p^0) \rho(p^2)$$

Definiamo

$$D(x, y, m^2) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \delta(p^0) \delta(p^2 - m^2)$$

$$\Rightarrow \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty dq^2 \rho(q^2) D(x, y, q^2)$$

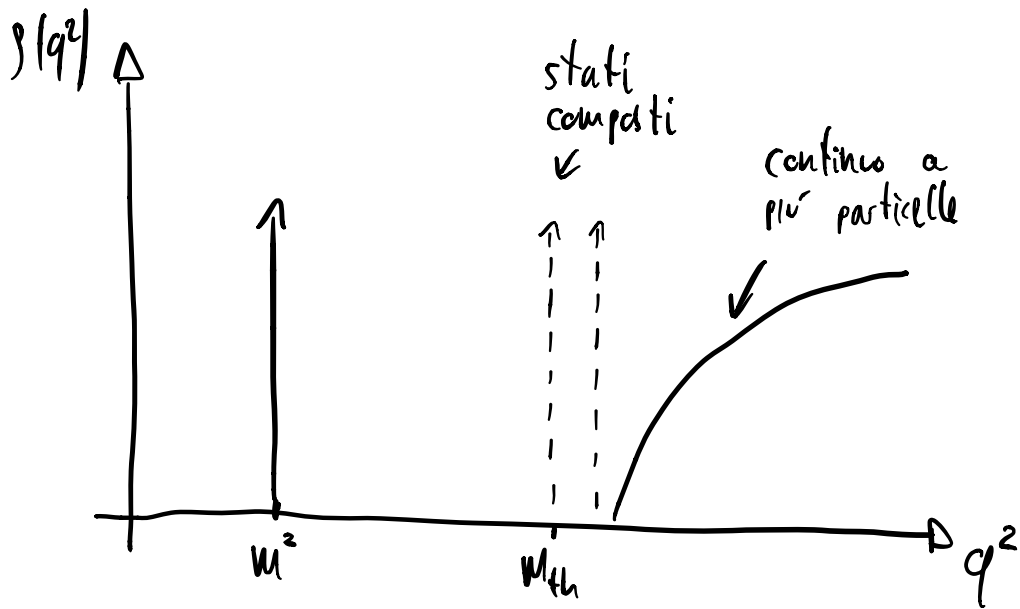
Possiamo separare il contributo a 1 particella usando

$$\langle 0 | \phi_{in}(x) \phi_{in}(y) | 0 \rangle = D(x, y, m^2)$$

$$\Rightarrow \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = Z D(x, y, m^2) + \int_{m_{th}^2}^\infty dq^2 \hat{\rho}(q^2) D(x, y, q^2)$$

$$\text{ovvero} \quad \rho(q^2) = Z \delta(q^2 - m^2) + \hat{\rho}(q^2) \theta(q^2 - m_{th}^2)$$

dove m_{th} è la soglia sopra la quale si possono produrre altri stati oltre a quello a 1-particella



Per il T-prodotto:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \int_0^{\infty} dq^2 \underbrace{[D(x, y, q^2) \theta(x^0 - y^0) + D(y, x, q^2) \theta(y^0 - x^0)]}_{\text{Propagatore di Feynman}} \rho(q^2)$$

$$= \int_0^{\infty} dq^2 \rho(q^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - q^2 + i\epsilon} e^{i p(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p(x-y)} i \tilde{\Pi}(p^2)$$

$$\tilde{\Pi}(p^2) \equiv \int_0^{\infty} dq^2 \frac{\rho(q^2)}{p^2 - q^2 + i\epsilon} = \frac{z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{m_{th}^2}^{\infty} dq^2 \frac{\hat{\rho}(q^2)}{p^2 - q^2 + i\epsilon}$$