

Esercizio. Qual è l'ordine di grandezza di  $\delta$ ?

$\delta \doteq 0$  significa uguale a zero a meno di un termine il cui valore assoluto è minore o uguale di una costante volte  $\|\varepsilon\|_\infty^2$ , per  $\|\varepsilon\|_\infty$  sufficientemente piccolo. Quindi, esistono  $c_1 > 0$  e  $c_2 \geq 0$  tali che

$$|\delta| \leq c_2 \|\varepsilon\|_\infty^2 \text{ per } \|\varepsilon\|_\infty \leq c_1.$$

Quindi, assumendo che  $c_2$  non sia grande,  $|\delta|$  ha ordine di grandezza non superiore a  $\|\varepsilon\|_\infty^2$ .

Esercizio. Nel caso  $n = 1$ , si può dire che

$$f \text{ mal condizionata sul dato } x \Rightarrow |\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty?$$

L'implicazione sussiste. Nel caso  $n = 1$  si ha

$$\delta \doteq K(f, x) \cdot \varepsilon$$

e quindi  $|K(f, x)| \gg 1$  implica  $|\delta| \gg |\varepsilon|$ .

Esercizio. Ancora nel caso  $n = 1$ , si può dire, per una  $f$  strettamente monotona, che

$$f \text{ mal condizionata sul dato } x \Rightarrow f^{-1} \text{ ben condizionata sul dato } f(x)$$

e

$$f \text{ ben condizionata sul dato } x \Rightarrow f^{-1} \text{ mal condizionata sul dato } f(x)?$$

Risulta

$$K(f^{-1}, f(x)) = \frac{1}{K(f, x)}.$$

Quindi, si può dire che la prima implicazione è vera, avendosi  $|K(f, x)| \gg 1$  e quindi

$$|K(f^{-1}, f(x))| = \frac{1}{|K(f, x)|} \ll 1.$$

La seconda invece no, perché si ha

$$|K(f^{-1}, f(x))| = \frac{1}{|K(f, x)|} \gg 1$$

solo se

$$|K(f, x)| \ll 1.$$

Esercizio. Spiegare perchè nel caso di una funzione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , vale a dire

$$f(x) = a^T x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $a \in \mathbb{R}^n$ , si può sostituire  $\doteq$  con  $=$  nella relazione tra l'errore  $\delta$  e gli errori  $\varepsilon_i$ . Osservare che addizione, sottrazione e

$$f(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $a \in \mathbb{R}$  hanno questa forma.

Ricordiamo che si ha

$$\delta = \sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i + \frac{R(\tilde{x}, x)}{y}$$

dove  $R(\tilde{x}, x)$  è il resto dello sviluppo di Taylor. Questo resto può essere espresso come

$$R(\tilde{x}, x) = \int_0^1 (1-s) (\tilde{x} - x)^T \nabla^2 f(x + s(\tilde{x} - x)) (\tilde{x} - x) ds$$

dove  $\nabla^2 f(x + s(\tilde{x} - x))$  è la matrice hessiana di  $f$  nel punto  $x + s(\tilde{x} - x)$ . Poichè

$$f(y) = \sum_{i=1}^n a_i y_i, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

ha derivate parziali seconde nulle, la matrice hessiana di  $f$  è sempre zero. Quindi

$$R(\tilde{x}, x) = 0.$$

Alternativamente, si può osservare che

$$R(\tilde{x}, x) = f(\tilde{x}) - f(x) - \nabla f(x)^T (\tilde{x} - x)$$

con

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = (a_1, \dots, a_n) = a$$

e quindi

$$R(\tilde{x}, x) = a^T \tilde{x} - a^T x - a^T (\tilde{x} - x) = 0.$$

Esercizio. Provare che nel caso di una somma  $x_1 + x_2$  con  $x_1$  e  $x_2$  dello stesso segno, risulta

$$|\delta| \leq \max \{ |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
|\delta| &= \left| \frac{x_1}{x_1+x_2} \varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2} \varepsilon_2 \right| \leq \left| \frac{x_1}{x_1+x_2} \varepsilon_1 \right| + \left| \frac{x_2}{x_1+x_2} \varepsilon_2 \right| \\
&= \frac{|x_1|}{|x_1+x_2|} |\varepsilon_1| + \frac{|x_2|}{|x_1+x_2|} |\varepsilon_2| \\
&\leq \frac{|x_1|}{|x_1+x_2|} \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} + \frac{|x_2|}{|x_1+x_2|} \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \\
&= \left( \frac{|x_1|}{|x_1+x_2|} + \frac{|x_2|}{|x_1+x_2|} \right) \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \\
&= \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1+x_2|} \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \\
&= \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}
\end{aligned}$$

in quanto  $x_1$  e  $x_2$  hanno lo stesso segno e quindi  $|x_1|+|x_2|=|x_1+x_2|$ .

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento delle funzioni  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  date da

$$f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad g(x) = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo la funzione  $f$ . Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$  e  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$ . Per  $i \in \{1, \dots, n\}$  si ha

$$K_i(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i}{f(x)} = \frac{1 \cdot x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

Quindi

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot \varepsilon_i.$$

Consideriamo ora la funzione  $g$ . Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$ . Per  $i \in \{1, \dots, n\}$  si ha

$$K_i(g, x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \cdot x_i}{g(x)} = \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \cdot x_i}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_1 x_2 \cdots x_n} = 1.$$

Quindi

$$\delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Esercizio. Per ognuna delle seguenti funzioni di una variabile, determinare l'indice di condizionamento e i punti  $x$  in cui è mal condizionata:

1)  $\tan$ ;

Sia

$$f(x) = \tan x, \quad x \in D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Per  $x \in D$  che non sia un multiplo di  $\pi$ , vale a dire per  $x$  che non sia un multiplo di  $\frac{\pi}{2}$ , si ha

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x}{\tan x} = \frac{x}{\cos^2 x \tan x} = \frac{x}{\sin x \cos x} = \frac{2x}{\sin 2x}.$$

Essendo  $|\sin 2x| \leq 1$ , si ha

$$|K(f, x)| \geq 2|x|$$

e quindi la tangente è mal condizionata su un dato  $x$  grande. Per  $x$  non grande, la tangente è mal condizionata su  $x$  se e solo se  $x$  è vicino a un multiplo non nullo di  $\frac{\pi}{2}$ . Per  $x$  piccolo, la tangente è ben condizionata avendosi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1.$$

2)  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ ;

Si ha

$$\arcsin = \left( \sin|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$$

e quindi, ricordando che

$$K(\arcsin, \sin x) = K(f^{-1}, f(x)) = \frac{1}{K(f, x)} = \frac{1}{K(\sin, x)}$$

e che

$$K(\sin, x) = \frac{x}{\tan x},$$

si vede che  $\arcsin$  è mal condizionato su  $u = \sin x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , se e solo se

$$K(\sin, x) = \frac{x}{\tan x}$$

è piccolo, che si ha se e solo se  $x$  è vicino a  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Per cui,  $\arcsin$  è mal condizionato su  $u \in (-1, 1)$  se e solo se  $u$  è vicino a  $\pm 1$ .

Si ha

$$\arccos = \left( \cos|_{(0, \pi)} \right)^{-1}$$

e quindi  $\arccos$  è mal condizionato su  $u = \cos x$ ,  $x \in (0, \pi)$ , se e solo se

$$K(\cos, x) = -x \tan x$$

è piccolo che si ha se e solo se  $x$  è vicino a 0 o  $\pi$ . Per cui, arccos è mal condizionato su  $u \in (-1, 1)$  se e solo se  $u$  è vicino a  $\pm 1$ .

Si ha

$$\arctan = \left( \tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$$

e quindi  $\arctan$  è mal condizionato su  $u = \tan x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , se e solo se

$$K(\tan, x) = \frac{2x}{\sin 2x}$$

è piccolo. Essendo

$$\frac{u}{\sin u} \geq 1 \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{R},$$

$\arctan$  è ben condizionato su ogni dato.

3)

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-c\},$$

dove  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Si ha per  $x \neq -c$ ,  $x \neq 0$  e  $x \neq -\frac{b}{a}$ ,

$$\begin{aligned} K(f, x) &= \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\frac{a \cdot (x+c) - (ax+b) \cdot 1}{(x+c)^2} \cdot x}{\frac{ax+b}{x+c}} = \frac{\frac{ac-b}{(x+c)^2} x}{\frac{ax+b}{x+c}} \\ &= \frac{(ac-b)x}{(x+c)(ax+b)}. \end{aligned}$$

Se  $ac-b=0$ , si ha  $f(x)=a$  e  $f$  essendo costante ha indice di condizionamento zero. Supponiamo  $ac-b \neq 0$ . Per vedere dove la  $f$  è mal condizionata cerchiamo numeri  $z$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow z} K(f, x) = \infty.$$

Questo si ha per  $z = -c$  e  $z = -\frac{b}{a}$ , ma non per  $z = \infty$  essendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ac-b)x}{(x+c)(ax+b)} = 0.$$

Quindi  $f$  è mal condizionata se e solo se  $x \approx -c$  o  $x \approx -\frac{b}{a}$ .

4) sinh, cosh, tanh;

Sia

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per  $x \neq 0$ , si ha

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\cosh x \cdot x}{\sinh x} = \frac{x}{\tanh x}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow z} K(f, x) = \infty,$$

se e solo se  $z = \infty$ . Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\tanh x} = \infty,$$

essendo

$$-1 \leq \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leq 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tanh x} = 1.$$

Si conclude che  $\sinh$  è mal condizionata su  $x$  se e solo se  $x$  è grande.

Sia

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per  $x \neq 0$ , si ha

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\sinh x \cdot x}{\cosh x} = \tanh x \cdot x$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow z} K(f, x) = \infty$$

se e solo se  $z = \infty$ . Per cui,  $\cosh$  è mal condizionata su  $x$  se e solo se  $x$  è grande.

Sia

$$f(x) = \tanh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per  $x \neq 0$ , si ha

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\cosh^2 x} \cdot x}{\tanh x} = \frac{x}{\cosh^2 x \tanh x} = \frac{x}{\sinh x \cosh x}.$$

Non esiste  $z$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow z} K(f, x) = \infty$$

Infatti  $\cosh$  non è mai zero,  $\sinh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sinh x \cosh x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sinh x \cosh x} = 0.$$

si conclude che  $\tanh$  è ben condizionata su ogni  $x$ .

5)

$$f(x) = \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per  $x \in \mathbb{R}$  non multiplo di  $\frac{\pi}{2}$ , si ha

$$K(f, x) = K(g, x) \quad \text{con } g(x) = \sin 2x$$

e

$$K(g, x) = K(\sin, 2x).$$

Per  $x$  non grande, la funzione  $f$  è mal condizionata se e solo se  $2x$  è vicino a un multiplo non nullo di  $\pi$ , cioè  $x$  è vicino a un multiplo non nullo di  $\frac{\pi}{2}$ .

Esercizio. Per ognuna delle seguenti funzioni di due variabili, determinare gli indici di condizionamento e i punti  $x$  in cui è mal condizionata:

- 1)  $f(x) = x_1^n - x_2^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , dove  $n$  è un intero positivo.

Si ha, per  $x_1, x_2 \neq 0$  con  $x_1 \neq \pm x_2$  se  $n$  è pari e  $x_1 \neq x_2$  se  $n$  è dispari,

$$\begin{aligned} K_1(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{n x_1^{n-1} \cdot x_1}{x_1^n - x_2^n} = \frac{n x_1^n}{x_1^n - x_2^n} = \frac{n}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} \\ K_2(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{-n x_2^{n-1} \cdot x_2}{x_1^n - x_2^n} = -\frac{n x_2^n}{x_1^n - x_2^n} = \frac{n}{1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n}. \end{aligned}$$

La funzione  $f$  è mal condizionata se e solo se  $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n \approx 1$ . Osservare che  $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n \approx 1$  non è equivalente a  $\frac{x_1}{x_2} \approx 1$ : per esempio se  $\frac{x_1}{x_2} = 0.95$  si ha  $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{10} = 0.60$ .

- 2)  $f(x) = g(x_1 x_2)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si ha, per  $x_1, x_2 \neq 0$  e  $g(x_1 x_2) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} K_1(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{g'(x_1 x_2) x_2 x_1}{g(x_1 x_2)} = K(g, x_1 x_2) \\ K_2(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{g'(x_1 x_2) x_1 x_2}{g(x_1 x_2)} = K(g, x_1 x_2) \end{aligned}$$

I due indici di condizionamento sono uguali in quanto la funzione è simmetrica rispetto a  $x_1$  e  $x_2$ : scambiando le due componenti si ottiene la stessa funzione. La funzione  $f$  è mal condizionata su  $x$  se e solo se  $g$  è mal condizionata su  $x_1 x_2$ .

3)  $f(x) = x_1^{x_2} = e^{x_2 \log x_1}$ ,  $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ .

Si ha, per  $x \in D$  con  $x_2 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} K_1(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{e^{x_2 \log x_1} x_2 \frac{1}{x_1} \cdot x_1}{e^{x_2 \log x_1}} = x_2 \\ K_2(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{e^{x_2 \log x_1} \log x_1 \cdot x_2}{e^{x_2 \log x_1}} = \log x_1 \cdot x_2. \end{aligned}$$

La funzione  $f$  è mal condizionata su  $x$  se e solo se  $x_2$  è grande o  $\log x_1 \cdot x_2$  è grande.

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento della funzione norma euclidea  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e i punti di  $\mathbb{R}^n$  in cui è mal condizionata.

Si ha

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha, per  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x_1, \dots, x_n \neq 0$  e per  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$K_i(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) x_i}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} 2x_i \cdot x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} = \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \leq 1.$$

Quindi  $f$  è ben condizionata su ogni dato  $x$ . Si ha addirittura

$$|\delta| \leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_j|.$$

Infatti

$$\begin{aligned} |\delta| &\doteq \left| \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \varepsilon_i}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \varepsilon_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} |\varepsilon_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_j| \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^2} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_j| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_j|. \end{aligned}$$



Esercizio. Si consideri un polinomio di grado  $n$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $k \in \{0, \dots, n\}$  e  $a_k \neq 0$ . Dire se  $p$  è ben o mal condizionato su un dato  $x$  piccolo e su un dato  $x$  grande.

Si ha, per  $x \in \mathbb{R}$  con  $x \neq 0$  e  $p(x) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} K(p, x) &= \frac{p'(x)x}{p(x)} = \frac{(na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (n-k)a_k x^{n-k-1})x}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}} \\ &= \frac{na_n x^n + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (n-k)a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}}. \end{aligned}$$

Avendosi

$$\lim_{x \rightarrow 0} K(p, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{na_n x^n + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (n-k)a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}} = n - k$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K(p, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{na_n x^n + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (n-k)a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}} = n$$

si ha che  $p$  è ben condizionato sia su un dato  $x$  piccolo che su un dato  $x$  grande.

Inoltre osserviamo che se  $z \neq 0$  è uno zero semplice del polinomio  $p$ , cioè  $p(z) = 0$  e  $p'(z) \neq 0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow z} K(p, x) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{p'(x)x}{p(x)} = \infty.$$

Quindi  $p$  è mal condizionato su un dato  $x$  con  $x \approx z$ .

Esercizio. Provare l'equivalenza di

$$a \dot{=} c \text{ e } c \leq b \text{ per qualche numero } c,$$

e

$$a \leq d \text{ e } d \dot{=} b \text{ per qualche numero } d.$$

Assumiamo

$$a \dot{=} c \text{ e } c \leq b \text{ per qualche numero } c$$

e proviamo

$$a \leq d \text{ e } d \dot{=} b \text{ per qualche numero } d.$$

Si ha

$$a = c + e \text{ e } c \leq b \text{ per qualche numero } c$$

con  $|e| \leq C\varepsilon^2$  per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. Allora, posto

$$d = b + e,$$

si ha

$$\underbrace{a}_{=c+e} \leq \underbrace{d}_{=b+e} \text{ e } d \dot{=} b.$$

Viceversa, assumiamo

$$a \leq d \text{ e } d \dot{=} b \text{ per qualche numero } d$$

e proviamo

$$a \dot{=} c \text{ e } c \leq b \text{ per qualche numero } c$$

Si ha

$$a \leq d \text{ e } d + e = b \text{ per qualche numero } d$$

con  $|e| \leq C\varepsilon^2$  per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. Allora, posto

$$c = a + e,$$

si ha

$$a \dot{=} c \text{ e } \underbrace{c}_{=a+e} \leq \underbrace{b}_{=d+e}.$$

Esercizio. Consideriamo una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n = 1$ . Nell'analisi con più indici di condizionamento, una tale funzione ha un unico indice di condizionamento  $K(f, x)$ . Quale relazione intercorre tra questo unico indice di condizionamento  $K(f, x)$  e l'indice di condizionamento, introdotto nell'analisi con un unico indice di condizionamento, di questa stessa funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $m = n = 1$ , nella norma  $|\cdot|$  su  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$ ?

L'unico indice di condizionamento dell'analisi con più indici di condizionamento è

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)}$$

definito per  $x \in D$ ,  $x \neq 0$  e  $f(x) \neq 0$ .

L'indice di condizionamento dell'analisi con un unico indice di condizionamento è

$$\overline{K}(f, x) = \frac{\|f'(x)\| |x|}{|f(x)|}$$

definito per  $x \in D$ ,  $x \neq 0$  e  $f(x) \neq 0$ . Qui

$$\|f'(x)\| = \max_{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)y|}{|y|} = \max_{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)| |y|}{|y|} = \max_{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |f'(x)| = |f'(x)|,$$

quindi

$$\overline{K}(f, x) = \frac{|f'(x)| |x|}{|f(x)|}$$

e si conclude che

$$\overline{K}(f, x) = |K(f, x)|.$$

Esercizio. Trovare la costante  $\frac{CD}{cd}$  nel caso in cui:

- a) le norme <sup>(1)</sup> siano norme  $\infty$  e le norme <sup>(2)</sup> siano norme 1;
- b) le norme <sup>(1)</sup> siano norme  $\infty$  e le norme <sup>(2)</sup> siano norme 2;
- c) le norme <sup>(1)</sup> siano norme 2 e le norme <sup>(2)</sup> siano norme 1.

Si è visto che, per ogni  $x \in \mathbb{R}^p$ , si ha

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq p \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{p} \|x\|_\infty \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p} \|x\|_2. \end{aligned}$$

Nel caso a) risulta

$$c = 1, C = n, d = 1 \text{ e } D = m \text{ e quindi } \frac{CD}{cd} = nm.$$

Nel caso b) risulta

$$c = 1, C = \sqrt{n}, d = 1 \text{ e } D = \sqrt{m} \text{ e quindi } \frac{CD}{cd} = \sqrt{nm}.$$

Nel caso c) risulta

$$c = 1, C = \sqrt{n}, d = 1 \text{ e } D = \sqrt{m} \text{ e quindi } \frac{CD}{cd} = \sqrt{nm}.$$

Esercizio. Determinare l'indice di condizionamento della divisione

$$f(x) = \frac{x_1}{x_2}, \quad x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\},$$

nelle norme  $\|\cdot\|_\infty$  su  $\mathbb{R}^2$  e  $\|\cdot\|_\infty = |\cdot|$  su  $\mathbb{R}$ . Dire dove la funzione è mal condizionata.

Per  $x \in \mathbb{R}^2$  con  $x_1 \neq 0$  e  $x_2 \neq 0$ , si ha

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\|f'(x)\| = \|f'(x)\|_\infty = \frac{1}{|x_2|} + \frac{|x_1|}{|x_2|^2} = \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_2|^2}$$

e quindi

$$K(f, x) = \frac{\|f'(x)\|_\infty \|x\|_\infty}{|f(x)|} = \frac{\frac{|x_1| + |x_2|}{|x_2|^2} \max\{|x_1|, |x_2|\}}{\frac{|x_1|}{|x_2|}} = \frac{(|x_1| + |x_2|) \max\{|x_1|, |x_2|\}}{|x_1| |x_2|}.$$

L'indice di condizionamento della divisione è uguale a quello della moltiplicazione e quindi la divisione è mal condizionata se e solo se  $|x_i| \gg |x_j|$ , dove  $|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  e  $|x_j| = \min\{|x_1|, |x_2|\}$ .

Esercizio. Determinare l'indice di condizionamento della funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$f(x) = (x_1 + x_2, x_1 x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

nella norma  $\|\cdot\|_1$  su  $\mathbb{R}^2$ . Dire dove la funzione è mal condizionata.

Si ha, per  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

$$\|f'(x)\| = \|f'(x)\|_1 = \max\{1 + |x_2|, 1 + |x_1|\}$$

$$= 1 + \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

da cui

$$K(f, x) = \frac{\|f'(x)\|_1 \|x\|_1}{\|f(x)\|_1} = \frac{(1 + \max\{|x_1|, |x_2|\})(|x_1| + |x_2|)}{|x_1 + x_2| + |x_1 x_2|}.$$

Con  $|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  e  $|x_j| = \min\{|x_1|, |x_2|\}$ , si ha

$$\begin{aligned} K(f, x) &= \frac{(1 + \max\{|x_1|, |x_2|\})(|x_1| + |x_2|)}{|x_1 + x_2| + |x_1 x_2|} \\ &= \frac{(1 + |x_i|)(|x_i| + |x_j|)}{|x_i + x_j| + |x_i| |x_j|} \\ &= \frac{(1 + |x_i|) \left(1 + \frac{|x_j|}{|x_i|}\right)}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|} \end{aligned}$$

Si ha

$$\frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|} \leq K(f, x) \leq 2 \frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|}$$

e si può quindi esaminare

$$\frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|}$$

che ha lo stesso ordine di grandezza di  $K(f, x)$ . Osserviamo che il denominatore è un numero piccolo per  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $|x_j|$  piccolo. Con tale dato  $x$ ,  $|x_i|$  è piccolo e il numeratore è circa 1 e quindi  $f$  è mal condizionata su  $x$ .

Esaminiamo ora quel che si ha quando non risulta  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $|x_j|$  piccolo, vale a dire quando si ha  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $|x_j|$  non è piccolo oppure  $\frac{x_j}{x_i}$  non è vicino a  $-1$ .

Supponiamo  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $|x_j|$  non è piccolo. In tal caso, si ha

$$\frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|} \approx \frac{1 + |x_i|}{|x_j|} = \frac{1}{|x_j|} + \frac{|x_i|}{|x_j|} \approx \frac{1}{|x_j|} + 1$$

e quindi  $f$  è ben condizionata su  $x$ .

Supponiamo ora  $\frac{x_j}{x_i}$  non è vicino a  $-1$ .

Essendo

$$\frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|} \leq \frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right|}$$

si ha che  $f$  è ben condizionata su  $x$  se  $|x_i|$  non è grande.

Se  $|x_i|$  è grande, allora, essendo

$$\frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|} \leq \frac{1 + |x_i|}{|x_j|} = \frac{1}{|x_j|} + \frac{|x_i|}{|x_j|}$$

si ha che  $f$  è ben condizionata su  $x$  se  $\frac{|x_i|}{|x_j|}$  non è grande (che implica  $|x_j|$  non piccolo).

Se  $|x_i|$  è grande e  $\frac{|x_i|}{|x_j|}$  è grande, allora, essendo

$$\frac{1}{\frac{2}{|x_i|} + \frac{|x_j|}{|x_i|}} = \frac{|x_i|}{2 + |x_j|} \leq \frac{1 + |x_i|}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + |x_j|},$$

si ha che  $f$  è mal condizionata su  $x$ .

Riassumendo si ha la seguente tabella

|                                                               |                                                               |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$                                  | $f$ mal condizionata se e solo se $ x_j $ è piccolo           |
| $\frac{x_j}{x_i}$ non è vicino a $-1$ e $ x_i $ non è grande. | $f$ ben condizionata                                          |
| $\frac{x_j}{x_i}$ non è vicino a $-1$ e $ x_i $ è grande      | $f$ mal condizionata se e solo $\frac{ x_i }{ x_j }$ è grande |

Ad esempio se  $x_1$  ha ordine di grandezza  $10^8$  e  $x_2$  ha ordine di grandezza  $10^4$ , la  $f$  è mal condizionata.

Esercizio. Provare che per un dato perturbato  $\tilde{x} = x + tx$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , si ha  $\delta = \varepsilon$ . Quindi, anche se  $K(A, x) \gg 1$ , per questa particolare perturbazione di  $x$  risulta  $\delta = \varepsilon$ .

Si ha

$$\varepsilon = \frac{\|\tilde{x} - x\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \frac{\|tx\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \frac{|t| \|x\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = |t|$$

e

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\|\tilde{y} - y\|_{\mathbb{R}^m}}{\|y\|_{\mathbb{R}^m}} = \frac{\|A(\tilde{x} - x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}} = \frac{\|Atx\|_{\mathbb{R}^m}}{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}} \\ &= \frac{\|tAx\|_{\mathbb{R}^m}}{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}} = \frac{|t| \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}} = |t| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esercizio. Determinare l'indice di condizionamento della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

nelle norma  $\|\cdot\|_1$  su  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ . Dire per quali dati la matrice è mal condizionata. Determinare anche dati perturbati  $\tilde{x}$  per i quali  $\delta = K(A, x)\varepsilon$ .

Sia  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  con

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} \neq \underline{0}.$$

Avendosi

$$K(A, x) = \frac{\|A\|_1 \|x\|_1}{\|Ax\|_1}$$

con

$$\|A\|_1 = \max\{1, 2, 1\} = 2$$

risulta

$$K(A, x) = \frac{\|A\|_1 \|x\|_1}{\|Ax\|_1} = \frac{2(|x_1| + |x_2| + |x_3|)}{|x_1 + x_2| + |x_2 + x_3|}.$$

Ora, sia  $x_i$  la componente tale che  $|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$  e siano  $x_j$  e  $x_k$  le altre due componenti.

Supponiamo  $x_i = x_2$ . Risulta

$$\begin{aligned} K(A, x) &= \frac{2(|x_i| + |x_j| + |x_k|)}{|x_i + x_j| + |x_i + x_k|} \\ &= \frac{2\left(1 + \frac{|x_j|}{|x_i|} + \frac{|x_k|}{|x_i|}\right)}{\left|1 + \frac{x_j}{x_i}\right| + \left|1 + \frac{x_k}{x_i}\right|}. \end{aligned}$$

Se  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $\frac{x_k}{x_i} \approx -1$ , allora il denominatore è un numero piccolo e il numeratore è circa 6 e quindi  $f$  è mal condizionata su  $x$ . Se  $\frac{x_j}{x_i}$  non è vicino a  $-1$  o  $\frac{x_k}{x_i}$  non è vicino a  $-1$ , allora

$$K(A, x) = \frac{2 \left( 1 + \frac{|x_j|}{|x_i|} + \frac{|x_k|}{|x_i|} \right)}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right| + \left| 1 + \frac{x_k}{x_i} \right|} \leq \frac{6}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right| + \left| 1 + \frac{x_k}{x_i} \right|}$$

e quindi  $f$  è ben condizionata su  $x$ .

Supponiamo  $x_i \neq x_2$ . Risulta, con  $x_j = x_2$ ,

$$\begin{aligned} K(A, x) &= \frac{2(|x_i| + |x_j| + |x_k|)}{|x_i + x_j| + |x_j + x_k|} \\ &= \frac{2 \left( 1 + \frac{|x_j|}{|x_i|} + \frac{|x_k|}{|x_i|} \right)}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right| + \left| \frac{x_j}{x_i} + \frac{x_k}{x_i} \right|} \\ &= \frac{2 \left( 1 + \frac{|x_j|}{|x_i|} + \frac{|x_k|}{|x_i|} \right)}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right| + \left| 1 + \frac{x_j}{x_i} + \frac{x_k}{x_i} - 1 \right|} \end{aligned}$$

Se  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $\frac{x_k}{x_i} \approx 1$ , allora il denominatore è un numero piccolo e il numeratore è circa 6 e quindi  $f$  è mal condizionata su  $x$ . Se  $\frac{x_j}{x_i} \approx -1$  e  $\frac{x_k}{x_i}$  non è vicino a 1, allora

$$K(A, x) = \frac{2 \left( 1 + \frac{|x_j|}{|x_i|} + \frac{|x_k|}{|x_i|} \right)}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right| + \left| 1 + \frac{x_j}{x_i} + \frac{x_k}{x_i} - 1 \right|} \approx \frac{2 \left( 2 + \frac{|x_k|}{|x_i|} \right)}{\left| \frac{x_k}{x_i} - 1 \right|} \leq \frac{6}{\left| \frac{x_k}{x_i} - 1 \right|}$$

e quindi  $f$  è ben condizionata su  $x$ . Se  $\frac{x_j}{x_i}$  non è vicino a  $-1$ , allora

$$K(A, x) = \frac{2 \left( 1 + \frac{|x_j|}{|x_i|} + \frac{|x_k|}{|x_i|} \right)}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right| + \left| \frac{x_j}{x_i} + \frac{x_k}{x_i} \right|} \leq \frac{6}{\left| 1 + \frac{x_j}{x_i} \right|}$$

e quindi  $f$  è ben condizionata su  $x$ .

Riassumendo si ha la seguente tabella

|                |                                                                                                                       |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x_i = x_2$    | $f$ mal condizionata se e solo se $\frac{x_1}{x_2} \approx -1$ e $\frac{x_3}{x_2} \approx -1$                         |
| $x_i \neq x_2$ | $f$ mal condizionata se e solo $\frac{x_2}{x_i} \approx -1$ e $\frac{x_k}{x_i} \approx 1$ ( $k \neq 2$ e $k \neq i$ ) |

Osservare che nella seconda riga la condizione

$$\frac{x_2}{x_i} \approx -1 \text{ e } \frac{x_k}{x_i} \approx 1 \text{ (} k \neq 2 \text{ e } k \neq i \text{)}$$

può essere equivalentemente riscritta come

$$\frac{x_1}{x_2} \approx -1 \text{ e } \frac{x_3}{x_2} \approx -1.$$

Si conclude che, sia per  $x_i = x_2$  sia per  $x_i \neq x_2$ ,  $f$  è mal condizionata se e solo se  $\frac{x_1}{x_2} \approx -1$  e  $\frac{x_3}{x_2} \approx -1$ .

Si ha  $\delta = K(A, x)\varepsilon$  per

$$\tilde{x} = x + tz,$$

dove  $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  è tale che

$$\|A\|_1 = \frac{\|Az\|_1}{\|z\|_1}$$

e  $t \in \mathbb{R}$ .

Un tale  $z$  risulta essere  $z = e^{(j^*)}$  dove  $j^* \in \{1, 2, 3\}$  è l'indice della colonna di  $A$  in cui è massima la somma dei moduli degli elementi. Si ha  $j^* = 2$  è quindi

$$\tilde{x} = x + te^{(2)} = (x_1, x_2 + t, x_3),$$

dove la perturbazione è solo nella seconda componente di  $x$ .



Esercizio. Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  non singolari e sia  $\|\cdot\|$  una norma su  $\mathbb{R}^n$ .  
Mostrare che

$$K_{\|\cdot\|}(AB) \leq K_{\|\cdot\|}(A) \cdot K_{\|\cdot\|}(B).$$

Poichè  $A$  e  $B$  sono non singolari, allora anche  $AB$  è non singolare e si ha

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} K_{\|\cdot\|}(AB) &= \|AB\| \cdot \|(AB)^{-1}\| \\ &= \underbrace{\|AB\|}_{\leq \|A\|\|B\|} \cdot \underbrace{\|B^{-1}A^{-1}\|}_{\leq \|B^{-1}\|\|A^{-1}\|} \\ &\leq \|A\| \|B\| \|B^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &= \|A\| \|A^{-1}\| \|B\| \|B^{-1}\| \\ &= K_{\|\cdot\|}(A) K_{\|\cdot\|}(B). \end{aligned}$$

Esercizio. Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  non singolare e sia  $\|\cdot\|$  una norma su  $\mathbb{R}^n$ . Quale relazione sussiste tra  $K_{\|\cdot\|}(\alpha A)$ , dove  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e  $K_{\|\cdot\|}(A)$ ? Quale relazione sussiste tra  $K_{\|\cdot\|}(A^{-1})$  e  $K_{\|\cdot\|}(A)$ ?

Poichè  $A$  è non singolare e  $\alpha \neq 0$ , si ha  $\alpha A$  non singolare con

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

e quindi

$$\begin{aligned} K_{\|\cdot\|}(\alpha A) &= \|\alpha A\| \cdot \|(\alpha A)^{-1}\| = \|\alpha A\| \cdot \left\| \frac{1}{\alpha} A^{-1} \right\| \\ &= |\alpha| \|A\| \cdot \frac{1}{|\alpha|} \|A^{-1}\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \\ &= K_{\|\cdot\|}(A). \end{aligned}$$

Si ha poi che  $A^{-1}$  è non singolare con

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

e quindi

$$K_{\|\cdot\|}(A^{-1}) = \|A^{-1}\| \cdot \|(A^{-1})^{-1}\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = K_{\|\cdot\|}(A).$$

Esercizio. Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  non singolare. Quale relazione sussiste tra  $K_{\|\cdot\|_1}(A^T)$  e  $K_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ ? Quale relazione sussiste tra  $K_{\|\cdot\|_2}(A^T)$  e  $K_{\|\cdot\|_2}(A)$ ?

Osservare che per una matrice  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , si ha

$$\|B^T\|_1 = \|B\|_\infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned} K_{\|\cdot\|_1}(A^T) &= \|A^T\|_1 \cdot \|(A^T)^{-1}\|_1 = \|A^T\|_1 \cdot \|(A^{-1})^T\|_1 \\ &= \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = K_{\|\cdot\|_\infty}(A) \end{aligned}$$

Poi, si ha

$$\begin{aligned} \|B^T\|_2 &= \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ è autovalore di } (B^T)^T B^T\}} \\ &= \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ è autovalore di } BB^T\}} \\ &= \|B\|_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$K_{\|\cdot\|_2}(A^T) = \|A^T\|_2 \cdot \|(A^T)^{-1}\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = K_{\|\cdot\|_2}(A).$$

Esercizio. Sia  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ , dove  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sono tutti non nulli, una matrice diagonale non singolare. Determinare  $K_{\|\cdot\|_1}(A)$ ,  $K_{\|\cdot\|_2}(A)$  e  $K_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ .

Si ha

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}| \\ \|A\|_1 &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}| \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ è autovalore di } A^T A\}} \\ &= \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ è autovalore di } \text{diag}(a_{11}^2, a_{22}^2, \dots, a_{nn}^2)\}} \\ &= \sqrt{\left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_{ii}\right)^2} \\ &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|. \end{aligned}$$

Analogamente, essendo

$$A^{-1} = \text{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$$

ancora una matrice diagonale, risulta

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_{\infty} &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{1}{|a_{ii}|} = \frac{1}{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|} \\ \|A^{-1}\|_1 &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{1}{|a_{ii}|} = \frac{1}{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|} \\ \|A^{-1}\|_2 &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{1}{|a_{ii}|} = \frac{1}{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|}\end{aligned}$$

Per cui,

$$\begin{aligned}K_{\|\cdot\|_1}(A) &= \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \frac{\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|}{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|} \\ K_{\|\cdot\|_2}(A) &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|}{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|} \\ K_{\|\cdot\|_{\infty}}(A) &= \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|}{\min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ii}|}.\end{aligned}$$

Esercizio. Trovare, nelle tre situazioni 1), 2) e 3) sopra, dei valori  $a$  e  $b$  per cui  $K_{\parallel} \cdot \parallel_{\infty}(A)$  ha ordine di grandezza  $10^4$ .

Per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

con  $|a| \geq |b|$  si ha

$$K_{\parallel} \cdot \parallel_{\infty}(A) = \frac{(|a| + 1)^2}{|p - 1|}, \quad p = ab.$$

Le situazioni 1), 2) e 3) di mal condizionamento sono:

- 1)  $p$  vicino a 1;
- 2)  $p$  non è vicino a 1,  $|p|$  non è grande e  $|a|^2$  è grande;
- 3)  $|p|$  è grande e  $\frac{|a|}{|b|}$  è grande.

Situazione 1):  $p$  vicino a 1. In

$$K_{\parallel} \cdot \parallel_{\infty}(A) = \frac{(|a| + 1)^2}{|p - 1|}$$

scegliamo  $a = 1$  e  $b$  in modo da avere

$$p - 1 = ab - 1 = 10^{-4},$$

per cui

$$K_{\parallel} \cdot \parallel_{\infty}(A) = \frac{(|a| + 1)^2}{|p - 1|} = \frac{(1 + 1)^2}{10^{-4}} = 4 \cdot 10^4.$$

Si prende

$$b = \frac{1 + 10^{-4}}{a} = 1 + 10^{-4}.$$

Situazione 2):  $p$  non è vicino a 1,  $|p|$  non è grande e  $|a|^2$  è grande. In

$$K_{\parallel} \cdot \parallel_{\infty}(A) = \frac{(|a| + 1)^2}{|p - 1|}$$

scegliamo  $a = 10^2$  e  $b$  in modo da avere

$$p - 1 = ab - 1 = 1,$$

per cui

$$K_{\parallel} \cdot \parallel_{\infty}(A) = \frac{(|a| + 1)^2}{|p - 1|} = \frac{101^2}{1} = 1.01^2 \cdot 10^4.$$

Si prende

$$b = \frac{2}{a} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

Situazione 3):  $|p|$  è grande e  $\frac{|a|}{|b|}$  è grande. In

$$\begin{aligned} K_{\parallel} \cdot \|_{\infty}(A) &= \frac{(|a|+1)^2}{|p-1|} \\ &= \frac{|a|^2}{|p|} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{|a|}\right)^2}{\left|1 - \frac{1}{p}\right|} \\ &= \frac{|a|}{|b|} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{|a|}\right)^2}{\left|1 - \frac{1}{p}\right|} \end{aligned}$$

scegliamo  $a$  e  $b$  in modo da avere

$$\frac{a}{b} = 10^4 \text{ e } p = ab = 10^2,$$

vale a dire

$$ab = 10^4 b^2 = 10^2$$

e quindi

$$b = 10^{-1} \text{ e } a = 10^4 b = 10^3.$$

Per cui

$$K_{\parallel} \cdot \|_{\infty}(A) = \frac{|a|}{|b|} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{|a|}\right)^2}{\left|1 - \frac{1}{p}\right|} = \frac{1.001^2}{0.99} \cdot 10^4.$$

Esercizio. Si consideri  $a = 1.01$  e  $b = 0.99$ . Determinare un dato  $x \in \mathbb{R}^2$  e una dato perturbato  $\tilde{x}$  tale che  $\delta = K_{\parallel} \cdot \|_{\infty}(A) \cdot \varepsilon$ .

Si ha

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 0.99 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} K_{\parallel} \cdot \|_{\infty}(A) &= \frac{(|a|+1)^2}{|p-1|} = \frac{2.01^2}{|(1+0.01)(1-0.01)-1|} \\ &= \frac{2.01^2}{|1-0.01^2-1|} = 2.01^2 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{|p-1|} \begin{bmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.99 & -1 \\ -1 & 1.01 \end{bmatrix}$$

Il dato è

$$x = A^{-1}y$$

dove  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è tale che

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{\|A^{-1}y\|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}}$$

e quindi

$$y = (-1, 1)$$

dal momento che la massima somma dei moduli avviene nella seconda riga di  $A^{-1}$  e in tale riga i segni degli elementi sono negativo e positivo. Quindi

$$x = A^{-1}y = 10^4 \begin{bmatrix} 0.99 & -1 \\ -1 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} -1.99 \\ 2.01 \end{bmatrix}.$$

Il dato perturbato è

$$\tilde{x} = x + tz$$

dove  $t \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è tale che

$$\|A\|_{\infty} = \frac{\|Az\|_{\infty}}{\|z\|_{\infty}}$$

e quindi

$$z = (1, 1)$$

dal momento che la massima somma dei moduli avviene nella prima riga di  $A$  e in tale riga i segni degli elementi sono positivi.

Esercizio. Determinare  $K_{\parallel \cdot \parallel_1}(A)$  e  $K_{\parallel \cdot \parallel_2}(A)$ .

Poichè  $A$  è una matrice simmetrica, risulta

$$K_{\parallel \cdot \parallel_1}(A) = K_{\parallel \cdot \parallel_{\infty}}(A^T) = K_{\parallel \cdot \parallel_{\infty}}(A) = \frac{(|a| + 1)^2}{|ab - 1|}$$

e

$$K_{\parallel \cdot \parallel_2}(A) = \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}},$$

dove  $\rho_{\max}$  e  $\rho_{\min}$  sono massimo e minimo modulo dei due autovalori di  $A$ . Determiniamo gli autovalori di  $A$ . L'equazione caratteristica è

$$0 = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - 1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + b)^2 - 4(ab - 1) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 4 = (a - b)^2 + 4. \end{aligned}$$

e i due autovalori sono

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4}}{2}.\end{aligned}$$

Siccome  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono alla stessa distanza da  $\frac{a+b}{2}$ ,  $\lambda_2$  a sinistra di  $\frac{a+b}{2}$  e  $\lambda_1$  a destra, il maggiore in modulo sarà  $\lambda_1$  se  $\frac{a+b}{2} \geq 0$  e sarà  $\lambda_2$  se  $\frac{a+b}{2} < 0$ .

Per cui se  $a+b \geq 0$ , si ha

$$K_{\parallel \cdot \parallel_2}(A) = \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4}}{\left|a+b-\sqrt{(a-b)^2+4}\right|}$$

e se  $a+b < 0$ , si ha

$$K_{\parallel \cdot \parallel_2}(A) = \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \frac{\left|a+b-\sqrt{(a-b)^2+4}\right|}{\left|a+b+\sqrt{(a-b)^2+4}\right|}.$$

Esercizio. Si consideri la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

con  $c \neq -1$ . Determinare  $K_{\parallel \cdot \parallel_1}(B)$  e dire per quali  $c$  si ha  $B$  mal condizionata.

Si ha

$$B^{-1} = \frac{1}{c+1} \begin{bmatrix} c & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|B\|_1 &= \max\{2, 1+|c|\} \\ \|B^{-1}\|_1 &= \frac{1}{|c+1|} \max\{|c|+1, 2\} \\ K_{\parallel \cdot \parallel_1}(B) &= \|B\|_1 \cdot \|B^{-1}\|_1 = \frac{1}{|c+1|} \max\{2, 1+|c|\}^2 \\ &= \begin{cases} \frac{4}{|c+1|} & \text{se } 2 \geq 1+|c| \text{ cioè } |c| \leq 1 \\ \frac{(|c|+1)^2}{|c+1|} & \text{se } 2 < 1+|c| \text{ cioè } |c| > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Poichè

$$\lim_{c \rightarrow -1} K_{\parallel} \cdot \parallel_1(B) = +\infty$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} K_{\parallel} \cdot \parallel_1(B) = +\infty,$$

la matrice  $B$  è mal condizionata se e solo se  $c$  è vicino a  $-1$  o  $|c|$  è grande.

Esercizio. Data la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

determinare  $K_{\parallel} \cdot \parallel_2(C)$  e dire per quali  $a$  si ha  $C$  mal condizionata.

Risulta

$$C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo gli autovalori di  $C^T C$ :

$$0 = \lambda^2 - \text{tr}(C^T C) \lambda + \det(C^T C) = \lambda^2 - (a^2 + 2) \lambda + 1$$

$$\Delta = (a^2 + 2)^2 - 4$$

$$\lambda_1 = \frac{a^2 + 2 + \sqrt{(a^2 + 2)^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a^2 + 2 - \sqrt{(a^2 + 2)^2 - 4}}{2} = \frac{1}{\lambda_1}$$

Quindi

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\lambda_1}, \quad \sigma_{\min} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$$

e

$$K_{\parallel} \cdot \parallel_2(C) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \lambda_1 = \frac{a^2 + 2 + \sqrt{(a^2 + 2)^2 - 4}}{2}.$$

$C$  è mal condizionata se e solo se  $|a|^2$  è grande:

$$a^2 + 2 = \frac{a^2 + 2 + a^2 + 2}{2} \geq K_{\parallel} \cdot \parallel_2(C) \geq \frac{a^2 + 2}{2}.$$