

Interpolazione

S. Maset
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
maset@units.it

June 1, 2020

1 Introduzione

Ci occupiamo ora del problema di approssimare delle funzioni reali di una variabile reale con altre funzioni più semplici.

In particolare, queste funzioni più semplici saranno i polinomi e il tipo di approssimazione che si userà sarà l'*interpolazione*.

La scelta di usare i polinomi è dettata dal fatto che i valori dei polinomi sono facili da calcolare (si usano le operazioni aritmetiche di addizione, opposto e moltiplicazione) e che i polinomi si derivano e si integrano agevolmente.

L'approssimazione di una funzione con un polinomio corrisponde ad una *discretizzazione* della funzione: l'oggetto matematico infinito funzione, descritto da un numero infinito di numeri reali, viene approssimato dall'oggetto matematico finito polinomio, descritto da un numero finito di numeri reali (i suoi coefficienti).

2 Il problema di interpolazione di Lagrange

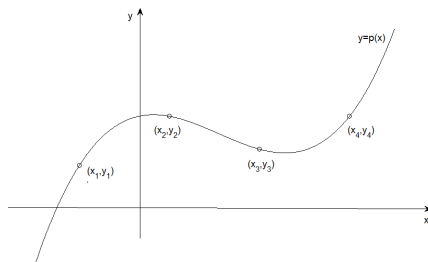
Il *problema di interpolazione di Lagrange* è così formulato: dati $n + 1$ punti (x_i, y_i) , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, nel piano $\mathbb{R}^2$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, cioè $n + 1$ punti a due a due non allineati verticalmente, trovare un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

di grado $\leq n$ tale che

$$p(x_i) = y_i \quad \text{per ogni } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Le ascisse $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, sono dette *odi di interpolazione* e le ordinate y_i *valori di interpolazione*.



Le condizioni di interpolazione

$$p(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

possono scriversi in forma compatta come il sistema lineare di $n + 1$ equazioni negli $n + 1$ coefficienti incogniti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_n & 1 \end{bmatrix}}_{=V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{=a \in \mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{=y \in \mathbb{R}^{n+1}},$$

cioè

$$Va = y.$$

Infatti, per $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, le componenti $(i + 1)$ -esime di Va e y sono $p(x_i)$ e y_i , rispettivamente.

La matrice V è detta *matrice di Vandermonde* relativa ai nodi $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, e il sistema $Va = y$ è detto *sistema di Vandermonde*.

Casi speciali del problema di interpolazione di Lagrange sono:

- il trovare la retta che passa per due punti non allineati verticalmente ($n = 1$);
- il trovare la parabola che passa per tre punti a due a due non allineati verticalmente ($n = 2$).

Ad esempio, per trovare la retta

$$y = a_1 x + a_0$$

che passa per i due punti $(-1, 3)$ e $(2, -5)$, si ha il sistema

$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

mentre, per trovare la parabola

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

che passa per i tre punti $(-1, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, -1)$, si ottiene

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il problema di interpolazione di Lagrange ha una e una sola soluzione. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 1 *La matrice di Vandermonde V è non singolare.*

Dimostrazione. Proviamo che V è non singolare mostrando che $\ker(V) = \{\underline{0}\}$. Infatti, se $\ker(V) = \{\underline{0}\}$, allora

$$\text{rank}(V) = n + 1 - \dim(\ker(V)) = n + 1.$$

Mostriamo che $\ker(V) \subseteq \{\underline{0}\}$ (l'altra inclusione è banale), cioè che per ogni $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $Vb = \underline{0}$, si ha $b = \underline{0}$.

Sia $b = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $Vb = \underline{0}$. Il polinomio

$$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

di grado $\leq n$ si annulla negli $n + 1$ punti distinti $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Infatti, si ha

$$q(x_i) = b_nx_i^n + b_{n-1}x_i^{n-1} + \dots + b_1x_i + b_0 = (Vb)_{i+1} = 0, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

Ora, il polinomio q è un polinomio di un qualche grado k , dove $k \in \{0, \dots, n\}$, oppure è il polinomio nullo (quello che ha tutti i coefficienti nulli e in tal caso $b = \underline{0}$). Nel primo caso, q ha al più k zeri reali, nel secondo caso q ha tutti i numeri reali come zeri.

Pertanto, avendo q almeno $n + 1$ zeri e quindi più di k zeri, q deve essere il polinomio nullo. Quindi $b = \underline{0}$ e si conclude che $\ker(V) = \{\underline{0}\}$ ■

Poichè la matrice del sistema di Vandermonde $Va = y$ è non singolare, tale sistema ha una e una sola soluzione. Quindi, il problema di interpolazione di Lagrange ha un unico polinomio soluzione, detto il *polinomio di interpolazione di Lagrange relativo ai dati* $(x_i, y_i), i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione con un polinomio p di grado ≤ 3 dei dati (x_i, y_i) , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si assuma

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

e

$$y_0 < y_1, y_1 > y_2 \text{ e } y_2 < y_3.$$

Mostrare che p ha un massimo locale $\eta \in (x_0, x_2)$ e un minimo locale $\mu \in (x_1, x_3)$ con $\eta < \mu$.

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con $n = 1$, per quali dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 0 ?

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con $n = 2$, per quali dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 1 ?

3 La forma di Lagrange

Il polinomio di interpolazione di Lagrange si può esprimere nella forma canonica

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sono ottenuti risolvendo il sistema di Vandermonde. E' però possibile esprimere il polinomio di interpolazione anche in un'altra forma.

Per ogni $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, si introduca il polinomio di grado n

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_j - x_n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

detto j -esimo *coefficiente di Lagrange* relativo ai nodi x_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Si noti che

$$\ell_j(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Infatti, per $i = j$, la produttoria ha tutti fattori uguali a uno mentre, per $i \neq j$, uno dei fattori, quello corrispondente a $k = i$, è nullo.

Consideriamo ora il polinomio di grado $\leq n$,

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot \ell_j(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Per $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, dalla (1) si ha

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot \ell_j(x_i) = y_i.$$

Pertanto, p è un polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa le condizioni di interpolazione.

Quindi, p è il polinomio di interpolazione di Lagrange e la forma (2) in cui è espresso è detta *forma di Lagrange*.

Ad esempio, nel problema di trovare la retta che passa per $(-1, 3)$ e $(2, -5)$, si hanno i coefficienti di Lagrange

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 2}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}(x - 2) \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio d'interpolazione risulta essere

$$\begin{aligned}p(x) &= y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}(x - 2)\right) + (-5) \cdot \frac{1}{3}(x + 1) \\ &= -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Invece, nel problema di trovare la parabola che passa per $(-1, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, -1)$, si hanno i coefficienti di Lagrange

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 0}{-1 - 0} \cdot \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}x(x - 1) \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} = -(x + 1)(x - 1) \\ \ell_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}(x + 1)x, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio d'interpolazione risulta essere

$$\begin{aligned}p(x) &= y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2}x(x - 1) + 2 \cdot (-(x + 1)(x - 1)) + (-1) \cdot \frac{1}{2}(x + 1)x \\ &= -2x^2 - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esercizio. Determinare la retta e la parabola precedenti risolvendo il sistema di Vandermonde.

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange del polinomio di interpolazione nel caso $n = 1$, ritrovare la nota equazione

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

della retta passante per i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange, determinare il polinomio di interpolazione relativo ai seguenti dati

x_i	y_i
-2	0
-1	1
0	0
1	2
2	0

Suggerimento: non è necessario determinare tutti i coefficienti di Lagrange.

L'insieme dei polinomi di grado $\leq n$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$.

Una base di tale spazio è costituita dai polinomi $1, x, x^2, \dots, x^n$ ed è detta base canonica.

Un'altra base è data dagli $n + 1$ coefficienti di Lagrange $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$ relativi ai nodi $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Infatti, essi sono linearmente indipendenti: se

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_j = 0$$

(uguaglianza tra funzioni), allora

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_j(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e prendendo, per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $x = x_i$ si ottiene

$$0 = \sum_{j=0}^n \alpha_j \underbrace{\ell_j(x_i)}_{\begin{cases} 1 \text{ se } j = i \\ 0 \text{ se } j \neq i \end{cases}} = \alpha_i.$$

Si osservi che quando scriviamo il polinomio di interpolazione come

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

lo stiamo esprimendo nella base canonica e le componenti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ in tale base sono la soluzione del sistema di Vandermonde. Invece quando lo scriviamo nella forma di Lagrange

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_{n-1} \ell_{n-1}(x) + y_n \ell_n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

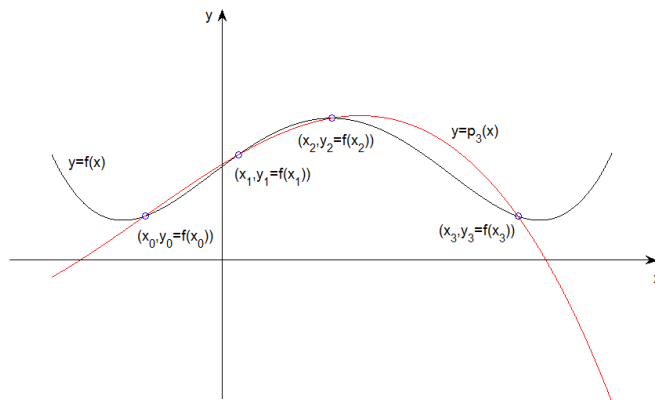
lo stiamo esprimendo nella base dei coefficienti di Lagrange e le componenti $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ in tale base sono semplicemente i valori di interpolazione.

Così, al prezzo di complicare la base facendola dipendere dai particolari nodi, si ottengono componenti semplici e immediatamente ottenibili.

4 Interpolazione di una funzione

Veniamo ora al problema di approssimare una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante un polinomio di interpolazione di Lagrange.

Precisamente, dati gli $n + 1$ nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, la funzione f viene approssimata con il polinomio di interpolazione di Lagrange p_n relativo ai dati $(x_i, y_i = f(x_i))$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.



Chiameremo tale polinomio p_n il *polinomio di interpolazione di Lagrange della funzione f* relativo ai nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Esercizio. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ nodi di interpolazione con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Nel caso in cui f sia un polinomio di grado $\leq n$, dire chi è il polinomio di interpolazione p_n di f relativo ai nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Esercizio. Usando l'esercizio precedente, mostrare che se f è un polinomio di grado $\leq n$, allora

$$\sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove ℓ_j , $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, sono i coefficienti di Lagrange relativi ai nodi x_j , $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dire poi, per $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $x \in \mathbb{R}$, a cosa è uguale

$$\sum_{j=0}^n x_j^k \ell_j(x).$$

La *funzione errore dell'interpolazione* $e_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x), \quad x \in [a, b].$$

Per definizione di polinomio di interpolazione, sui nodi risulta

$$e_n(x_i) = p_n(x_i) - f(x_i) = \underbrace{y_i}_{=f(x_i)} - f(x_i) = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Al di fuori dei nodi l'errore è dato dal seguente teorema.

Teorema 2 Sia $f \in C^{n+1}([a, b])$. Per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$e_n(x) = -\frac{w_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad (3)$$

dove w_{n+1} è il polinomio di grado $n+1$ dato da

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{R},$$

e ξ_x è un punto interno dell'intervallo $I_x := [\min\{x_0, x\}, \max\{x_n, x\}]$.

Dimostrazione. Sia $x \in [a, b]$. Si ha

$$w_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \circ x = x_2 \circ \cdots \circ x = x_n.$$

Quindi, la formula (3) vale quando x è un nodo (con ξ_x arbitrario) dal momento che ambo i membri sono zero.

Sia ora x un punto che non è un nodo. Consideriamo la funzione $g_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, che dipende da x , data da

$$g_x(t) = f(t) - p_n(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(t), \quad t \in [a, b].$$

Notare che, essendo x un punto che non è un nodo, si ha $w_{n+1}(x) \neq 0$ al denominatore.

Poichè $f \in C^{n+1}([a, b])$, si ha pure $g_x \in C^{n+1}([a, b])$ con

$$g_x^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - p_n^{(k)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}^{(k)}(t) \\ t \in [a, b] \text{ e } k \in \{0, 1, \dots, n+1\}.$$

Per $k = n+1$, si ha

$$\begin{aligned} g_x^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(t)}_{=0} + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!} \\ &= f^{(n+1)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)!, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Infatti

$$p_n^{(n+1)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

essendo p_n un polinomio di grado $\leq n$, e

$$w_{n+1}(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n) = t^{n+1} + q_n(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove q_n un polinomio di grado $\leq n$ e quindi

$$w_{n+1}^{(n+1)}(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^{n+1} + q_n^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0 = (n+1)!, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proviamo ora che $g_x^{(n+1)}$ si annulla in un punto ξ_x dell'intervallo I_x .
La funzione g_x si annulla nei nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ e in x . Infatti, si ha

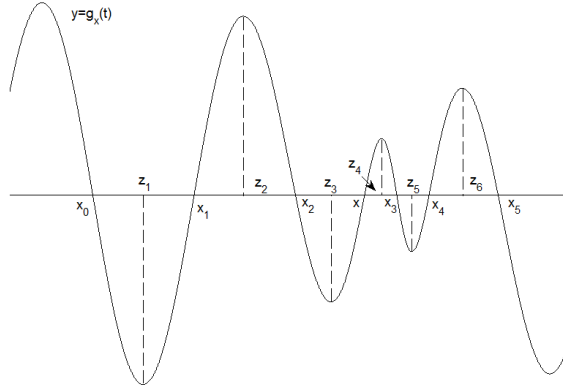
$$g_x(x_i) = \underbrace{f(x_i) - p_n(x_i)}_{=0} + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

e

$$g_x(x) = f(x) - p_n(x) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(x) = 0.$$

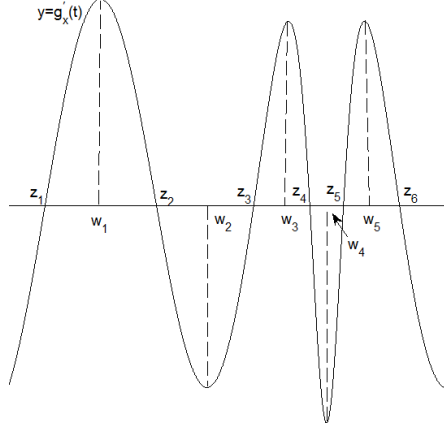
Per cui g_x si annulla in $n+2$ punti distinti dell'intervallo I_x (ricordare che x non è un nodo).

Per il teorema di Rolle, all'interno di ciascuno degli $n+1$ sottointervalli di I_x determinati dagli $n+2$ punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ e x , c'è un punto in cui g'_x si annulla. Così, g'_x si annulla in $n+1$ punti distinti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ all'interno di I_x (essendo tali punti all'interno di sottointervalli di I_x).



Ripetendo il ragionamento si trova che, all'interno di ciascuno degli n sottointervalli di I_x determinati dagli $n+1$ punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ in cui si annulla g'_x , c'è un punto in cui g''_x si annulla. Così, g''_x si annulla in n punti distinti

$w_1, w_2, \dots, w_n$ all'interno di I_x .



Così continuando si prova che $g_x^{(k)}$, $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, si annulla in $n+2-k$ punti distinti all'interno di I_x . Quindi, $g_x^{(n+1)}$ si annulla in $(n+2) - (n+1) = 1$ punto ξ_x all'interno di I_x .

Ponendo $t = \xi_x$ in

$$g_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)!$$

si ha

$$g_x^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)! = 0.$$

da cui

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x) = -\frac{w_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

■

Nel seguito, per una funzione $g \in C([a, b])$ e un intervallo chiuso $I \subseteq [a, b]$, misureremo la grandezza di g in I per mezzo della norma infinito o norma del massimo di g data da

$$\|g\|_I := \max_{x \in I} |g(x)|.$$

Per il modulo $|e_n(x)|$ dell'errore di interpolazione in un punto assegnato $x \in [a, b]$, dal teorema precedente si ha la maggiorazione

$$|e_n(x)| = \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot |f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!} \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \max_{\xi \in I_x} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!},$$

cioè

$$|e_n(x)| \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \|f^{(n+1)}\|_{I_x}}{(n+1)!}.$$

Per il massimo modulo $\max_{x \in [a, b]} |e_n(x)|$ dell'errore di interpolazione in tutto $[a, b]$, si ha invece la maggiorazione

$$\max_{x \in [a, b]} |e_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |w_{n+1}(x)| \cdot \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!},$$

cioè

$$\|e_n\|_{[a, b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a, b]} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a, b]}}{(n+1)!}.$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

e il polinomio di interpolazione di grado ≤ 2 relativo ai nodi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4},$$

dove la funzione assume i noti valori

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = \frac{1}{2}, \quad f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

I coefficienti di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - \frac{\pi}{6}}{0 - \frac{\pi}{6}} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{4}}{0 - \frac{\pi}{4}} = \frac{24}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{\frac{\pi}{6} - 0} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}} = -\frac{72}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ \ell_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{\frac{\pi}{4} - 0} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}} = \frac{48}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il polinomio di interpolazione è

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0) \cdot \ell_0(x) + f(x_1) \cdot \ell_1(x) + f(x_2) \cdot \ell_2(x) \\ &= -\frac{36}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{24\sqrt{2}}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{24\sqrt{2} - 36}{\pi^2} x^2 + \frac{9 - 4\sqrt{2}}{\pi} x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Per l'errore di interpolazione nel punto $x = \frac{\pi}{12}$, si ha (essendo $I_x = [0, \frac{\pi}{4}]$)

$$\left|e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \leq \frac{|w_3(x)| \cdot \|f^{(3)}\|_{I_x}}{3!} = \frac{|w_3\left(\frac{\pi}{12}\right)| \cdot \|f^{(3)}\|_{[0, \frac{\pi}{4}]}}{3!}$$

dove

$$\left| w_3 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right| = \left| \left(\frac{\pi}{12} - 0 \right) \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{2\pi^3}{12^3}$$

e

$$\left\| f^{(3)} \right\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \left\| \sin^{(3)} \right\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \left\| -\cos \right\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]} |-\cos x| = 1.$$

Si ottiene così

$$\left| e_2 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right| \leq \frac{\frac{2\pi^3}{12^3} \cdot 1}{3!} = 6.0 \cdot 10^{-3}.$$

Per il massimo modulo in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dell'errore di interpolazione si ha

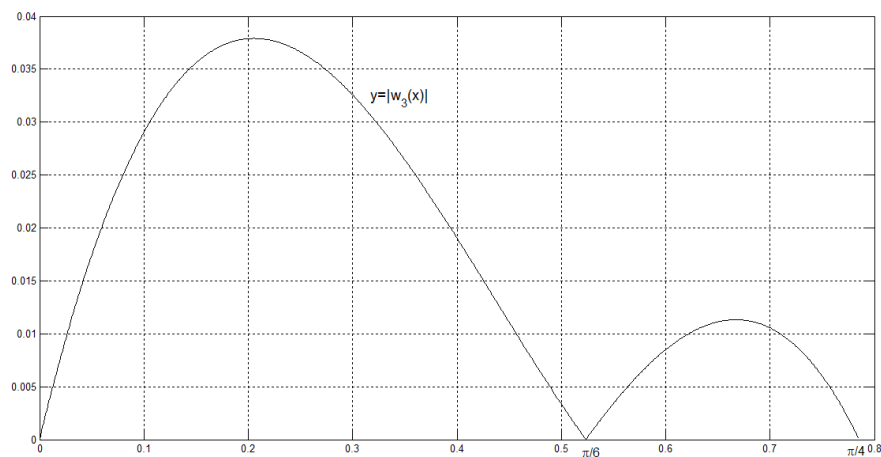
$$\|e_2\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \leq \frac{\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \cdot \|f^{(3)}\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]}}{3!}$$

con

$$\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \left| x \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \left| x^3 - \frac{5\pi}{12} x^2 + \frac{\pi^2}{24} x \right|$$

Con uno studio di funzione si trova

$$\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$$



e quindi

$$\|e_2\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \leq \frac{3.8 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{3!} = 6.3 \cdot 10^{-3}.$$

Esercizio. Effettuare lo studio di funzione con il quale si mostra $\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$.

Esercizio. Utilizzando il valore $\sin \frac{\pi}{12}$, determinare l'errore

$$e_2 \left(\frac{\pi}{12} \right) = p_2 \left(\frac{\pi}{12} \right) - \sin \frac{\pi}{12}$$

e confrontarlo con la maggiorazione trovata per il suo modulo.

Esercizio. Si considerino ora i due polinomi di interpolazione della funzione

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

il primo relativo ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3 e il secondo ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , dove x_0, x_1, x_2 sono come nell'esempio sopra e

$$x_3 = \frac{\pi}{3} \text{ e } x_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Dare, sia per $x = \frac{\pi}{12}$ sia per $x = \frac{5}{12}\pi$, le maggiorazioni per il modulo dell'errore di interpolazione in x .

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, 12].$$

Determinare il polinomio di interpolazione p_2 di f relativo ai nodi

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 9,$$

dove f assume i valori

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 3.$$

Determinare la maggiorazione di $|e_2(x)|$ per $x = 2$, $x = 3$ e $x = 11$. (Si osservi che $p_2(x)$ è un'approssimazione di $\sqrt{x}$). Si confronti poi la maggiorazione con $e_2(x)$ determinato utilizzando $\sqrt{x}$. Si determini infine la maggiorazione per $\|e_2\|_{[1,12]}$.

4.1 Maggiorazioni per $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$

Una volta fissato il numero $n + 1$ dei nodi di interpolazione, la maggiorazione

$$\frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}$$

di $\|e_n\|_{[a,b]}$ viene a dipendere dai due fattori:

- $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$, che dipende dalla scelta particolare degli $n + 1$ nodi di interpolazione, ma è indipendente dalla funzione da interpolare;
- $\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}$, che dipende dalla funzione da interpolare, ma è indipendente dalla scelta dei nodi.

Ci concentreremo ora sul fattore $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$ fornendo delle maggiorazioni per esso.

La prima maggiorazione che presentiamo è la seguente:

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1}.$$

Infatti, per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$|x - x_i| \leq b - a, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

e quindi

$$\begin{aligned} |w_{n+1}(x)| &= |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \\ &= |x - x_0| |x - x_1| \cdots |x - x_n| \leq (b - a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq (b - a)^{n+1}.$$

Per $\|e_n\|_{[a,b]}$ si ha allora la maggiorazione

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b - a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n + 1)!}.$$

Senza una qualche assunzione sui nodi, la maggiorazione

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b - a)^{n+1}$$

non può essere migliorata.

Infatti, nel caso di nodi di interpolazione ammassati verso uno degli estremi dell'intervallo $[a, b]$ e di un punto $x \in [a, b]$ all'altro estremo rispetto ai nodi



si ha

$$|x - x_i| \approx b - a, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

e quindi

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdots |x - x_n| \approx (b - a)^{n+1}.$$

L'approssimazione della funzione f con un polinomio di interpolazione relativo a nodi come quelli appena descritti, cioè ammassati tutti da una parte dell'intervallo $[a, b]$, è un'*estrapolazione*.

Con tale termine si intende l'approssimare la funzione f , mediante interpolazione ai nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ (con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$), al di fuori dell'intervallo $[x_0, x_n]$.

Più in generale, per estrapolazione si intende l'approssimare la funzione f al di fuori della “zona” in cui si hanno le informazioni sulla funzione.

Un altro caso ben noto di estrapolazione è quando si approssima f con un polinomio di Taylor sviluppato attorno all'estremo a : in questo caso si usano informazioni sulla funzione f nel solo punto a , in particolare i valori delle derivate di f in a , per approssimare la funzione al di fuori di tale punto.

Il polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno all'estremo a è

$$q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

e l'errore è dato da

$$\delta_n(x) = q_n(x) - f(x) = -\frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad x \in [a, b],$$

dove $\xi \in (a, x)$. Quindi,

$$\|\delta_n\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\delta_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

La maggiorazione di $\|\delta_n\|_{[a,b]}$ è la stessa di quella che abbiamo dato prima per l'interpolazione.

Esercizio. Si consideri ora l'approssimazione di f data dal polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio c di $[a, b]$. Dare una maggiorazione per la norma del massimo della funzione errore.

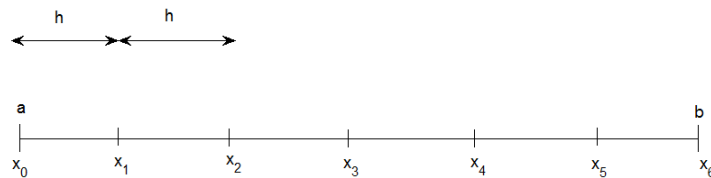
La precedente maggiorazione

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1},$$

che chiameremo (come anche la corrispondente maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$) *maggiorazione per l'estrpolazione*, viene migliorata da un'altra maggiorazione nel caso in cui i nodi di interpolazione, invece di ammassarsi tutti da una parte dell'intervallo $[a, b]$, si “spalmino” su di esso.

Un esempio di nodi “spalmati” su $[a, b]$ sono i *nodi equidistanti*

$$x_i = a + ih, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$



Teorema 3 (Maggiorazioni per nodi “spalmati”). Sia

$$h := \max \left\{ x_0 - a, \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i), b - x_n \right\}.$$

Si ha

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (n+1)!h^{n+1}$$

Inoltre, nel caso in cui $x_0 = a$ e $x_n = b$, si ha

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$$

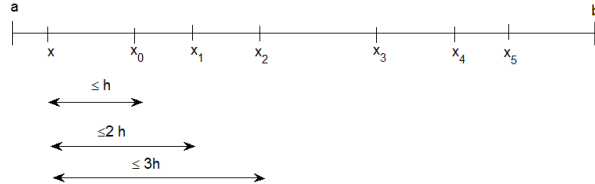
dove ora $h = \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)$.

Esercizio. Cosa diventa la prima maggiorazione nel caso di nodi non “spalmati” ammassati tutti verso un estremo dell’intervallo $[a, b]$? In tale situazione, la maggiorazione risulta migliore o peggiore di quella per l’extrapolazione?

Dimostrazione. Sia $x \in [a, b]$. Consideriamo le tre situazioni: $x \in [a, x_0]$, $x \in (x_n, b]$ e $x \in [x_0, x_n]$.

Se $x \in [a, x_0]$, allora

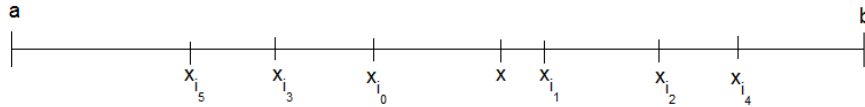
$$\begin{aligned} |w(x)| &= |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)| \\ &= |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdot |x - x_2| \cdot \cdots \cdot |x - x_n| \\ &\leq h \cdot 2h \cdot 3h \cdot \cdots \cdot (n+1)h \\ &= (n+1)!h^{n+1} \end{aligned}$$



In modo analogo si prova che, se $x \in (x_n, b]$, allora

$$|w(x)| \leq (n+1)!h^{n+1}.$$

Supponiamo ora $x \in [x_0, x_n]$. Siano x_{i_0} e x_{i_1} , con $x_{i_0} < x_{i_1}$, i nodi consecutivi entro cui si trova x , cioè si ha $x \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$, e siano poi $x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ gli altri nodi ordinati per distanza crescente da x .



Si ha

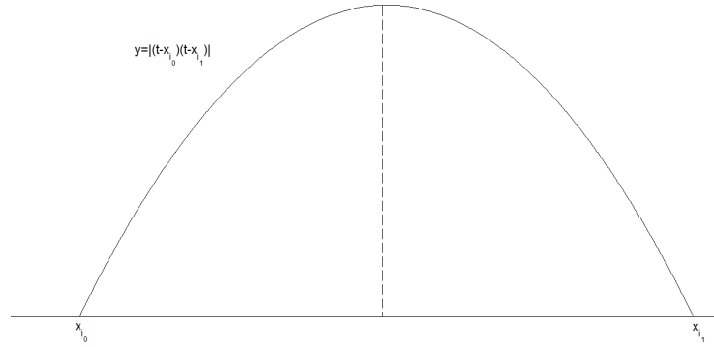
$$\begin{aligned}
 |w(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \\
 &= |(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})(x-x_{i_3})\cdots(x-x_{i_n})| \\
 &= |(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})| \cdot |x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \cdots \cdot |x-x_{i_n}|.
 \end{aligned}$$

Ora, maggioriamo prima il termine $|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})|$ e poi l'altro termine $|x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \cdots \cdot |x-x_{i_n}|$.

Consideriamo il termine $|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})|$. Si ha, essendo $x \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$,

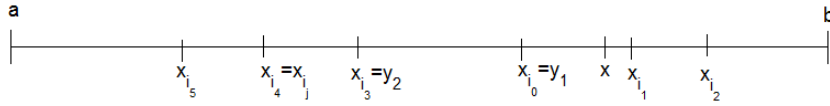
$$|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})| \leq \max_{t \in [x_{i_0}, x_{i_1}]} |(t-x_{i_0})(t-x_{i_1})| = \frac{(x_{i_1}-x_{i_0})^2}{4} \leq \frac{h^2}{4}.$$

con il massimo realizzato quando t è il punto medio dell'intervallo $[x_{i_0}, x_{i_1}]$.

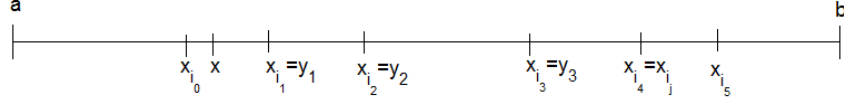


Consideriamo ora l'altro termine $|x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \cdots \cdot |x-x_{i_n}|$.

Esaminiamo $|x-x_{i_j}|$, $j \in \{2, \dots, n\}$. Andando da x e x_{i_j} si incontrano tra x e x_{i_j} consecutivamente i nodi $y_1, y_2, \dots, y_k$, dove $y_1 = x_{i_0}$ o $y_1 = x_{i_1}$ e $y_2, \dots, y_k$ sono alcuni (eventualmente tutti) tra i nodi $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$.



In questa figura, $y_2, \dots, y_k$ sono solo alcuni tra i nodi $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$. Qui, andando da x a $x_{i_j} = x_{i_4}$ si incontrano $y_1 = x_{i_0}$ e $y_2 = x_{i_3}$. Tra i nodi $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}} = x_{i_2}, x_{i_3}$ resta escluso x_{i_2} .



In quest'altra figura, $y_2, \dots, y_k$ sono tutti i nodi $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$. Qui, andando da x a $x_{i_j} = x_{i_4}$ si incontrano $y_1 = x_{i_1}$ e $y_2, y_3 = x_{i_2}, x_{i_3}$.

I $k-1$ elementi in $y_2, \dots, y_k$ non sono più dei $j-2$ elementi in $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$.

Pertanto $k-1 \leq j-2$ e quindi $k+1 \leq j$. Risulta allora

$$|x - x_{i_j}| \leq \underbrace{|x - y_1|}_{\leq h} + \underbrace{|y_1 - y_2|}_{\leq h} + \dots + \underbrace{|y_{k-1} - y_k|}_{\leq h} + \underbrace{|y_k - x_{i_j}|}_{\leq h} \leq (k+1)h \leq jh.$$

Quindi

$$|x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \dots \cdot |x - x_{i_n}| \leq 2h \cdot 3h \cdot \dots \cdot nh \leq n!h^{n-1}.$$

Pertanto, nella situazione $x \in [x_0, x_n]$, risulta

$$\begin{aligned} |w(x)| &= |(x - x_{i_0})(x - x_{i_1})| \cdot |x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \dots \cdot |x - x_{i_n}| \\ &\leq \frac{h^2}{4} \cdot n!h^{n-1} = \frac{n!h^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Si conclude che

$$|w(x)| \leq \begin{cases} (n+1)!h^{n+1} & \text{se } x \in [a, x_0) \cup (x_n, b] \\ \frac{n!h^{n+1}}{4} & \text{se } x \in [x_0, x_n]. \end{cases}$$

Avendosi $\frac{n!h^{n+1}}{4} < (n+1)!h^{n+1}$, si ottiene che

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq (n+1)!h^{n+1}.$$

Nel caso in cui $x_0 = a$ e $x_n = b$, si ha $[a, x_0) \cup (x_n, b] = \emptyset$. Pertanto

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$$

dove ora

$$\begin{aligned} h &= \max \left\{ \underbrace{x_0 - a}_{=0}, \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i), \underbrace{b - x_n}_{=0} \right\} \\ &= \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

■

Per $\|e_n\|_{[a,b]}$ si ha quindi la *maggiorazione per nodi "spalmati"*

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$

Infatti,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{(n+1)! h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$

Inoltre, per $\|e_n\|_{[a,b]}$ si ha anche la *maggiorazione per nodi "spalmati" con*
 $x_0 = a$ e $x_n = b$

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)}.$$

Infatti,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{\frac{n! h^{n+1}}{4} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)}.$$

Applicata ai nodi equidistanti, i quali soddisfano $x_0 = a$ e $x_n = b$ e si ha
 $h = \frac{b-a}{n}$, la precedente maggiorazione di $\|e_n\|$ diventa

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}.$$

che è la *maggiorazione per nodi equidistanti*.

Il rapporto tra la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione e la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\frac{\text{estrapolazione}}{\text{nodi equidistanti}} = \frac{\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}}{\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}} = \frac{4n^{n+1}}{n!}.$$

Ora, usando l'*approssimazione di Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

dove

$$a_n \sim b_n, \quad n \rightarrow \infty,$$

significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

si ha che

$$\frac{4n^{n+1}}{n!} \sim \frac{4n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{4\sqrt{n}e^n}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{n+1}}{n!} = +\infty.$$

Una tabella dei valori di $\frac{4n^{n+1}}{n!}$ per $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ è riportata sotto

n	$\frac{4n^{n+1}}{n!}$
1	4
2	16
3	54
4	$1.7 \cdot 10^2$
5	$5.2 \cdot 10^2$
6	$1.6 \cdot 10^3$
7	$4.6 \cdot 10^3$

L'elevato valore del rapporto tra le maggiorazioni ben spiega la differenza tra l'estrapolazione e l'*interpolazione vera e propria*, cioè l'approssimare la funzione f dentro l'intervallo $[x_0, x_n]$ determinato dai nodi di interpolazione.

Le estrapolazioni dovrebbero essere evitate a favore delle interpolazioni vere e proprie. Quindi, un polinomio di interpolazione con nodi “spalmati” dovrebbe essere preferito ad un polinomio di Taylor sviluppato attorno al punto a , quando si vuole approssimare la funzione f su tutto $[a, b]$ e non solo su un intorno di a .

Esercizio. Si determini il rapporto tra la maggiorazione della norma del massimo dell'errore del polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio di $[a, b]$ (trovata in un precedente esercizio) e la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti. Mostrare che tale rapporto tende a $+\infty$ per $n \rightarrow \infty$. Costruire una tabella che fornisce i valori di tale rapporto per $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{n+1}, \quad x \in [a, b],$$

interpolata su $n + 1$ nodi, cioè con un polinomio di grado $\leq n$. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione e il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti. Provare che il primo valore tende a zero per $n \rightarrow \infty$ se e solo se $b - a < 1$ e il secondo valore tende a zero per $n \rightarrow \infty$ se e solo se $b - a \leq e$.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 10],$$

interpolata ai nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 8$. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi “spalmati”.

Fare lo stesso con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [0.1, 1],$$

interpolata ai nodi $x_0 = 0.125$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$ e $x_3 = 1$. Questa nuova funzione f è l'inversa della precedente funzione f . Inoltre, rispetto alla precedente funzione, nodi e valori di interpolazione si scambiano.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, b],$$

dove $b > 1$, interpolata in $n + 1$ nodi equidistanti. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti e determinare quando questo valore converge a zero per $n \rightarrow \infty$.

Fare lo stesso con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right].$$

5 Aumentare il numero dei nodi di interpolazione

Chiediamoci ora se l'approssimazione della funzione f , fornita dal polinomio di interpolazione p_n , diventa buona quanto si vuole all'aumentare del numero $n + 1$ dei nodi di interpolazione. Questo significa chiedersi se si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0. \quad (4)$$

Se $f \in C^\infty([a, b])$ e f soddisfa la seguente *condizione sulle derivate*

$$\exists M, c \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} : \|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq M c^k,$$

allora si ha la (4), per ogni scelta dei nodi di interpolazione, vale a dire, precisando meglio, qualunque sia per ogni $n \in \mathbb{N}$ la scelta degli $n + 1$ nodi di interpolazione in $[a, b]$.

Infatti, ricordando la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{n+1}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{(b-a)^{n+1} M c^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{((b-a)c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((b-a)c)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

ricordando il limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$

valido per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esempi di funzioni che soddisfano la precedente condizione sulle derivate sono

$$f(x) = A \sin(\omega x), \quad g(x) = A \cos(\omega x), \quad h(x) = A e^{\lambda x}, \quad x \in [a, b],$$

dove $A, \omega, \lambda \in \mathbb{R}$.

Infatti, per $k \in \mathbb{N}$, detto $r(k)$ il resto della divisione di k per 4 si ha,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \begin{cases} A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 0 \\ A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 1 \\ -A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 2 \\ -A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 3 \end{cases} \\ g^{(k)}(x) &= \begin{cases} A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 0 \\ -A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 1 \\ -A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 2 \\ A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 3 \end{cases} \\ h^{(k)}(x) &= A\lambda^k e^{\lambda x}, \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

e quindi

$$\|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot |\omega|^k, \quad \|g^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot |\omega|^k, \quad \|h^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot \max_{x \in [a,b]} e^{\lambda x} \cdot |\lambda|^k.$$

Siano ora $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^\infty([a, b])$ soddisfacenti la condizione sulle derivate, cioè per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tali che

$$\exists M_i, c_i \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} : \|f_i^{(k)}\|_{[a,b]} \leq M_i c_i^k.$$

Per ogni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la combinazione lineare

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right)(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x), \quad x \in [a, b],$$

pure soddisfa la condizione sulle derivate.

Infatti, per $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right)^{(k)} \right\|_{[a,b]} &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{(k)} \right\|_{[a,b]} \\ &= \max_{x \in [a,b]} \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{(k)}(x) \right|}_{\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot |f_i^{(k)}(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i c_i^k} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i \underbrace{c_i^k}_{\leq c^k} \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i \right) \cdot c^k = M c^k \end{aligned}$$

dove $c = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} c_i$ e $M = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i$.

Pertanto, ogni combinazione lineare di coseni, seni e esponenziali soddisfa la condizione sulle derivate.

Sotto la condizione sulle derivate, $\|e_n\|_{[a,b]}$ converge a zero, per $n \rightarrow \infty$, per ogni scelta dei nodi di interpolazione. Tuttavia se si usano nodi "spalmati" la convergenza è più veloce. Usando la condizione sulle derivate nella maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti, si ottiene

$$\begin{aligned}\|e_n\|_{[a,b]} &\leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1} (n+1)} \leq \frac{(b-a)^{n+1} M c^{n+1}}{4n^{n+1} (n+1)} \\ &= \frac{M}{4(n+1)} \left(\frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Richiedendo

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \text{TOL},$$

dove TOL è una tolleranza prefissata sul massimo modulo dell'errore di interpolazione su $[a, b]$, si prende il minimo n tale che

$$\frac{M}{4(n+1)} \left(\frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1} \leq \text{TOL}.$$

Consideriamo, come esempio, l'interpolazione della funzione

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Per una tale funzione la condizione sulle derivate risulta soddisfatta con $M = 1$ e $c = 1$ (essendo $\cos x = A \cos(\omega x)$ con $A = 1$ e $\omega = 1$ e quindi $M = |A|$ e $c = |\omega|$). I valori di

$$\frac{M}{4(n+1)} \left(\frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1} = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^{n+1}$$

sono riportati nella tabella sottostante

n	$\frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^{n+1}$
1	$3.1 \cdot 10^{-1}$
2	$4.0 \cdot 10^{-2}$
3	$4.7 \cdot 10^{-3}$
4	$4.7 \cdot 10^{-4}$
5	$4.0 \cdot 10^{-5}$
6	$3.0 \cdot 10^{-6}$
7	$2.0 \cdot 10^{-7}$
8	$1.2 \cdot 10^{-8}$

Per cui, richiedendo ad esempio $\text{TOL} = 10^{-7}$, si prende $n = 8$.

Esercizio. Si osservi che per costruire il polinomio di interpolazione p_8 della funzione coseno nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ sono richiesti i valori della funzione coseno nei nodi equidistanti

$$x_i = i \frac{\pi}{8} = i \frac{\pi}{16}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\}.$$

Per $i \in \{0, 4, 8\}$, i valori $\cos x_i$ sono $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$. Determinare i valori $\cos x_i$ per $i \notin \{0, 4, 8\}$ usando le formule trigonometriche di bisezione e di addizione a partire dal valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ di coseno e seno in $\frac{\pi}{4}$. Questo mostra che non è necessario avere un modo di calcolare $\cos x$ per ogni x , al fine di costruire p_8 , che fornisce approssimazioni con sette cifre decimali esatte.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1],$$

su $n+1$ nodi equidistanti. Determinare n in modo da avere $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \text{TOL} = 10^{-10}$.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = 2 \sin 4\pi x - 3 \cos 8\pi x, \quad x \in [-2, 2],$$

su $n+1$ nodi equidistanti. Determinare n in modo da avere $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \text{TOL} = 10^{-10}$.

5.1 Il fenomeno di Runge

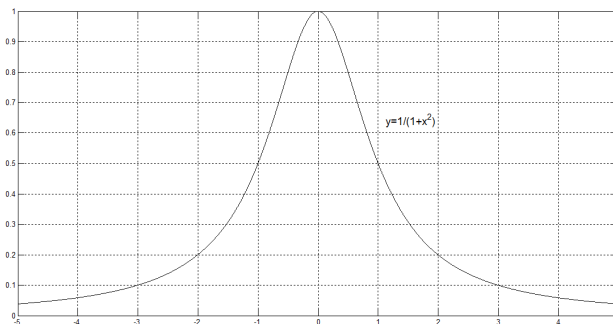
Per una funzione $f \in C^\infty([a, b])$ che non soddisfa la condizione sulle derivate non è assicurato che valga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0,$$

nemmeno se si usano nodi ben "spalmati" sull'intervallo $[a, b]$ come quelli equidistanti.

Ad esempio, consideriamo la funzione in $C^\infty([-5, 5])$,

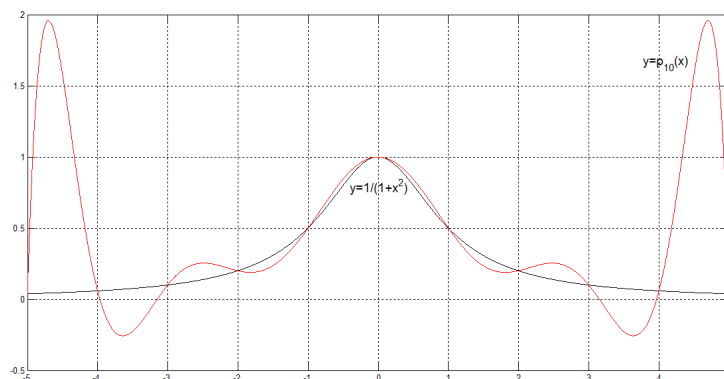
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$



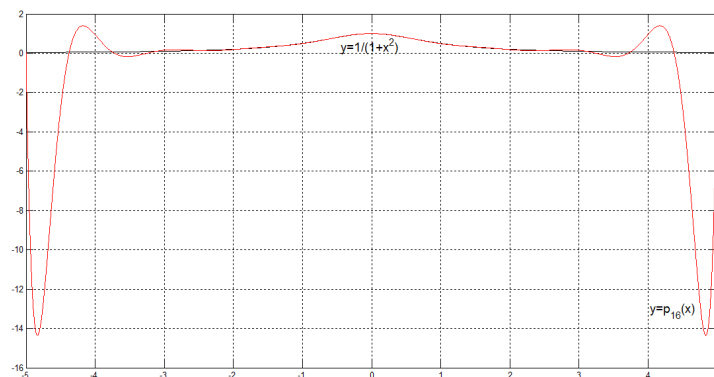
Interpolando tale funzione con i nodi equidistanti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[-5,5]} = +\infty.$$

Come evidenza di questo, in figura è mostrato p_{10} per nodi equidistanti.



Ecco invece p_{16} , sempre per nodi equidistanti.



Il polinomio di interpolazione p_n approssima bene la funzione f in un intorno di 0, ma poi oscilla fortemente vicino agli estremi -5 e 5 .

In questo caso, dove si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[-5,5]} = +\infty,$$

la f non soddisfa la condizione sulle derivate. Le derivate di f crescono più rapidamente della crescita prevista nella condizione sulle derivate.

Dal momento che anche la maggiorazione di $\|e_n\|_{[-5,5]}$ per nodi equidistanti tende a $+\infty$ per $n \rightarrow \infty$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1} (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[-5,5]}}{4n^{n+1} (n+1)} = +\infty,$$

si ha che la successione $\|f^{(n+1)}\|_{[-5,5]}$ va a infinito più rapidamente di come va a infinito la successione $\frac{n^{n+1}(n+1)}{10^{n+1}}$.

Il divergere di $\|e_n\|_{[a,b]}$, per $n \rightarrow \infty$, prende il nome di *fenomeno di Runge*.

5.2 Nodi di interpolazione di Chebyshev

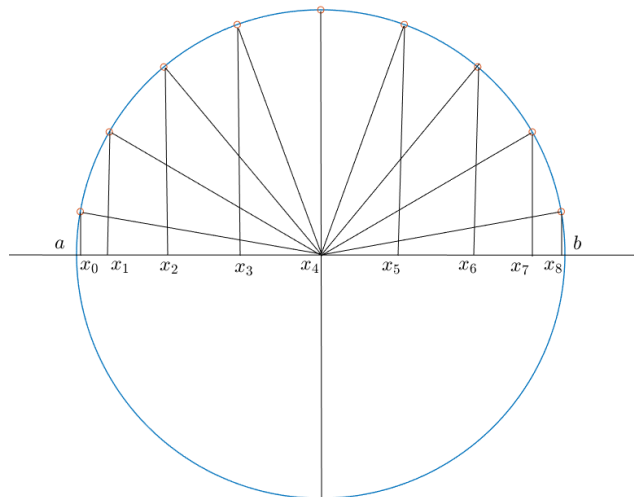
L'aumento del numero di nodi di interpolazione non è garanzia di una migliore approssimazione della funzione f . L'esempio visto sopra mostra che il fenomeno di Runge può presentarsi anche con una funzione f di classe C^∞ e nodi ben "spalmati" come quelli equidistanti.

Tuttavia esistono dei particolari nodi di interpolazione con i quali si evita il fenomeno di Runge e si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0$ se $f \in C^1([a,b])$.

Questi particolari nodi di interpolazione sono i *nodi di Chebyshev* dati da

$$x_i = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Come si vede dalla formula che li definisce (vedi anche la figura sottostante),



i nodi di Chebyshev sono costruiti nel seguente modo: si considera la circonferenza di centro il punto medio dell'intervallo $[a, b]$ e diametro l'intervallo $[a, b]$ e poi la si percorre a metà dall'estremo a all'estremo b in senso orario con la curva

$$(x, y) = \underbrace{\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)}_{\text{centro della circonferenza}} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{\text{raggio della circonferenza}} (-\cos t\pi, \sin t\pi), \quad t \in [0, 1].$$

I nodi di Chebyshev sono le ascisse x dei punti corrispondenti ai tempi

$$t_i = \frac{2i+1}{2n+2}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Osservare che

$$t_0 = \frac{1}{2n+2}, \quad t_n = 1 - \frac{1}{2n+2}$$

e $t_0, t_1, \dots, t_n$ sono equidistanti di $\frac{2}{2n+2}$. Per cui, i nodi di Chebyshev sono equidistanti sulla semicirconferenza, ma sull'intervallo $[a, b]$ tendono ad ammassarsi verso gli estremi, in modo da evitare le forti oscillazioni che si osservano con i nodi equidistanti nel fenomeno di Runge.

Con i nodi di Chebyshev si ha

$$\|e_n\|_{[a,b]} = O\left(\frac{\log n}{n^k}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

se $f \in C^k([a, b])$.

6 Interpolazione a tratti

Un'altra possibilità (diversa da quella di utilizzare i nodi di Chebyshev), per ottenere approssimazioni sempre migliori di una funzione f , è quella data dalla *interpolazione di Lagrange a tratti* che ora descriviamo.

Siano n, N interi positivi fissati. Si introducono sull'intervallo $[a, b]$ gli $N+1$ nodi equidistanti *primari*

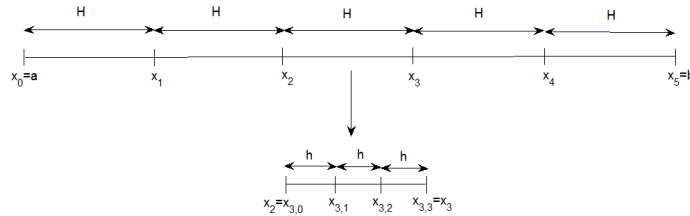
$$x_i = a + iH, \quad i \in \{0, 1, \dots, N\} \quad \text{e} \quad H = \frac{b-a}{N},$$

che suddividono l'intervallo $[a, b]$ negli N sottointervalli di ampiezza H

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

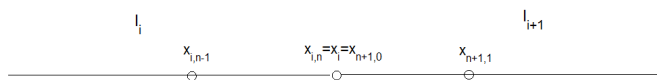
In ogni sottointervallo I_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, si introducono poi gli $n+1$ nodi equidistanti *secondari*

$$x_{i,j} = x_{i-1} + jh, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad h = \frac{H}{n}.$$



In ogni sottointervallo I_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, la funzione f viene approssimata dal polinomio di interpolazione di f relativo ai nodi $x_{i,j}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, che denoteremo con $p_{n,N,i}$. Osservare che $p_{n,N,i}$ ha grado $\leq n$.

Notare che, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, l'ultimo nodo secondario $x_{i,n} = x_i$ dell'intervallo I_i coincide con il primo nodo secondario $x_{i+1,0} = x_i$ dell'intervallo I_{i+1} .



Per cui, nel nodo

$$x_{i,n} = x_i = x_{i+1,0}$$

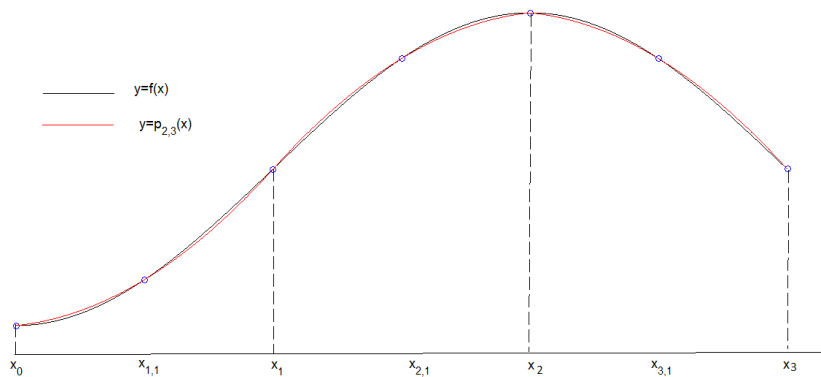
comune ai sottointervalli I_i e I_{i+1} , i polinomi $p_{n,N,i}$ e $p_{n,N,i+1}$ si "saldano": si ha

$$p_{n,N,i}(x_{i,n}) = f(x_i) = p_{n,N,i+1}(x_{i+1,0}).$$

Sull'intervallo $[a, b]$, la funzione f è quindi approssimata dal polinomio a tratti $p_{n,N} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$p_{n,N}(x) = p_{n,N,i}(x), \quad x \in I_i \text{ e } i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

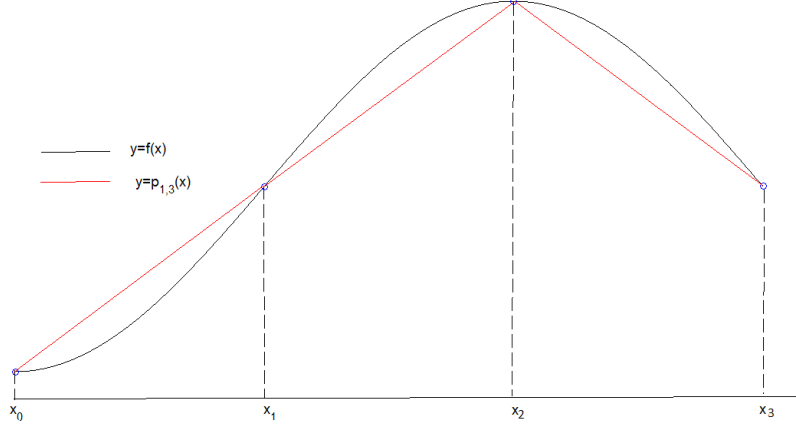
detto *polinomio di interpolazione di Lagrange a tratti* di f di grado $\leq n$ su N sottointervalli.



Esercizio. Spiegare perché $p_{n,N}$ è una funzione continua.

Nei casi $n = 1, 2, 3$ si parla di *interpolazione lineare a tratti*, *quadratica a tratti*, *cubica a tratti*, rispettivamente.

Un'illustrazione dell'interpolazione lineare a tratti è data in figura.



6.1 L'errore dell'interpolazione a tratti

L'errore $e_{n,N,i} : I_i \rightarrow \mathbb{R}$ sull'intervallo I_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, è dato da

$$e_{n,N,i}(x) = p_{n,N,i}(x) - f(x), \quad x \in I_i.$$

Ricordando la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti, si ha, per una funzione $f \in C^{n+1}([a,b])$,

$$\|e_{n,N,i}\|_{I_i} \leq \frac{H^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{4n^{n+1} (n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)}.$$

L'errore $e_{n,N} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dell'interpolazione a tratti è dato da

$$e_{n,N}(x) = p_{n,N}(x) - f(x), \quad x \in [a,b],$$

e per $x \in I_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si ha

$$e_{n,N}(x) = p_{n,N}(x) - f(x) = p_{n,N,i}(x) - f(x) = e_{n,N,i}(x).$$

Si ottiene, per una funzione $f \in C^{n+1}([a,b])$,

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1} (n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\|e_{n,N}\|_{[a,b]} &= \max_{i \in \{1,2,\dots,N\}} \|e_{n,N,i}\|_{I_i} \\
&\leq \max_{i \in \{1,2,\dots,N\}} \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)} \cdot \max_{i \in \{1,2,\dots,N\}} \|f^{(n+1)}\|_{I_i} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.
\end{aligned}$$

Tenendo fisso n e facendo tendere N all'infinito si ha, per ogni $f \in C^{n+1}([a,b])$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|e_{n,N}\|_{[a,b]} = 0.$$

In particolare, si ha

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} = O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Per cui, nell'interpolazione di Lagrange a tratti si ottengono approssimazioni sempre migliori aumentando il numero N dei sottointervalli, ma tenendo fisso il grado n dei polinomi di interpolazione in ogni sottointervallo, in modo da evitare il possibile fenomeno di Runge.

Per l'interpolazione lineare a tratti la maggiorazione dell'errore è

$$\|e_{1,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^2 \|f''\|_{[a,b]}}{8} \cdot \frac{1}{N^2}.$$

e l'ordine di convergenza è $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

Per l'interpolazione quadratica a tratti la maggiorazione dell'errore è

$$\|e_{2,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^3 \|f'''\|_{[a,b]}}{96} \cdot \frac{1}{N^3}$$

e l'ordine di convergenza è $O\left(\frac{1}{N^3}\right)$.

Per l'interpolazione cubica a tratti la maggiorazione dell'errore è

$$\|e_{3,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^4 \|f^{(4)}\|_{[a,b]}}{1296} \cdot \frac{1}{N^4}$$

e l'ordine di convergenza è $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$.

Si noti che se si vuole

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \text{TOL},$$

dove TOL è una tolleranza prefissata, basta prendere N tale che

$$\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}} \leq \text{TOL},$$

vale a dire

$$N \geq \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n^{n+1} \sqrt[n+1]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}}.$$

Si prende allora

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n^{n+1} \sqrt[n+1]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil.$$

Nel caso in cui risulti difficile calcolare $\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}$, ma sia facile invece determinare una sua maggiorazione M , si prende N tale che

$$\frac{(b-a)^{n+1} M}{4n^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}} \leq \text{TOL},$$

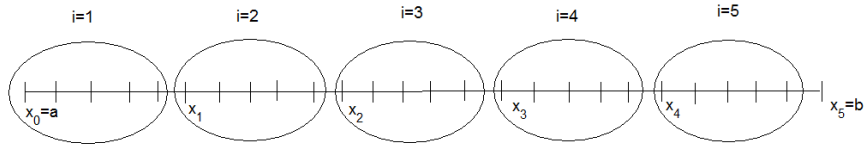
che comunque garantisce $\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \text{TOL}$. Si prende allora

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt[n+1]{M}}{n^{n+1} \sqrt[n+1]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil.$$

Notare che, con N sottointervalli, la funzione f deve essere nota su $nN + 1$ punti, cioè sui punti

$$x_{i,0} = x_{i-1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,n-1}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (5)$$

più x_n .



Notare che in (5) non si considera l'ultimo punto $x_{i,n} = x_i$ per non contarlo due volte: si ha infatti $x_{i+1,0} = x_i$ e quindi esso viene contato non come ultimo punto dell'intervallo i -esimo ma come primo punto dell'intervallo $(i+1)$ -esimo.

Nel caso dell'interpolazione lineare a tratti il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a) \sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $N + 1$.

Nel caso dell'interpolazione quadratica a tratti il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a) \sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $2N + 1$.

Nel caso dell'interpolazione cubica a tratti il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a) \sqrt[4]{\|f^{(4)}\|_{[a,b]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $3N + 1$.

Come esempio, determiniamo su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con $\text{TOL} = 10^{-7}$.

Nel caso dell'interpolazione lineare a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{\|-\cos\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{2\sqrt{8}} \cdot 10^{\frac{7}{2}} \right\rceil = 1757$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $N + 1 = 1758$.

Nel caso dell'interpolazione quadratica a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt[3]{\|\sin\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{4\sqrt[3]{12}} \cdot 10^{\frac{7}{3}} \right\rceil = 74$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $2N + 1 = 149$.

Nel caso dell'interpolazione cubica a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\|\cos\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{12} \cdot 10^{\frac{7}{4}} \right\rceil = 15$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $3N + 1 = 46$.

Si è visto sopra che la funzione $\cos$ è approssimata con $\text{TOL} = 10^{-7}$ dal polinomio p_8 di interpolazione di Lagrange non a tratti su nodi equidistanti utilizzando solo 9 valori della funzione. L'interpolazione di Lagrange a tratti ha però un senso anche in questo caso.

Infatti, se è necessario calcolare moltissimi valori della funzione $\cos$, invece di calcolare moltissime volte i valori del polinomio p_8 di grado 8, può essere conveniente calcolare con p_8 solo il numero richiesto di valori di $\cos$ per costruire un polinomio di interpolazione a tratti $p_{n,N}$ di grado n basso e, dopo, calcolare ogni valore di $\cos$ con $p_{n,N}$, il quale richiede nel calcolo dei suoi valori meno operazioni di p_8 .

Esercizio. Dire su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con $\text{TOL} = 10^{-10}$.

Esercizio. Si consideri una tabella che contiene i valori $\sin x$ per

$$x = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 90^\circ.$$

Si supponga di calcolare i valori $\sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, interpolando linearmente a tratti i valori della tabella. Determinare la maggiorazione per il massimo modulo dell'errore di interpolazione lineare a tratti.

Esercizio. Si voglia approssimare una funzione $f \in C^3([a, b])$ con una interpolazione lineare a tratti o quadratica a tratti utilizzando la formula

$$N = \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n^{n+1} \sqrt{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}}$$

per determinare il numero di sottointervalli (in realtà si dovrebbe prendere la parte intera superiore del membro destro).

Trovare per quali tolleranze TOL , l'interpolazione lineare utilizza un numero di punti in cui f deve essere nota inferiore a quello dell'interpolazione quadratica.

Si applichi il risultato trovato al caso della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [a, b],$$

dove $a \geq 1$.