

1 Norme di vettore

Definizione 1 Una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice una norma su $\mathbb{R}^n$ se

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0 \quad e \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ (positività);
- 2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (omogeneità);
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare).

Particolari norme su $\mathbb{R}^n$ sono le seguenti.

- La norma ∞ data da

$$\|x\|_{\infty} := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- La norma 1 data da

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

- La norma 2 o norma euclidea data da

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Per una norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ vale la seguente proprietà:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Inoltre, in $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti: date $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ norme su $\mathbb{R}^n$ si ha che

$$\exists c, C > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : c \|x\| \leq \|x\|' \leq C \|x\|.$$

Per esempio, si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\infty} &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty} \\ \|x\|_{\infty} &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty} \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2. \end{aligned}$$

2 Norme di matrice

Data una norma $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ su $\mathbb{R}^n$, una norma $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ su $\mathbb{R}^m$ e una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definiamo

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}$$

norma della matrice A indotta dalle norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ e $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ (detta anche norma di operatore).

Risulta

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Per cui, si ha

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|A\| \|x\|_{\mathbb{R}^n}$ (*proprietà di compatibilità*)
- $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} = \|A\| \|x\|_{\mathbb{R}^n}$.

Particolari norme di matrice sono le seguenti.

- La norma ∞ della matrice A è definita da

$$\|A\|_{\infty} := \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}$$

ed è data dalla formula

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Inoltre, se $i^* \in \{1, \dots, m\}$ è tale che

$$\sum_{j=1}^n |a_{i^*j}| = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

allora il vettore $z \in \mathbb{R}^n$ definito da

$$z_j = \begin{cases} \frac{a_{i^*j}}{|a_{i^*j}|} = \text{sign}(a_{i^*j}) & \text{se } a_{i^*j} \neq 0 \\ 1 & \text{se } a_{i^*j} = 0 \end{cases}, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

è tale che $\|Az\|_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|z\|_{\infty}$.

- La norma 1 della matrice A è definita da

$$\|A\|_1 := \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

ed è data dalla formula

$$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

Inoltre, se $j^* \in \{1, \dots, n\}$ è tale che

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij^*}| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

allora il vettore $z = e^{(j^*)} \in \mathbb{R}^n$, dove $e^{(j^*)}$ è il j^* -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, è tale che $\|Az\|_1 = \|A\|_1 \|z\|_1$.

- La norma 2 della matrice A è definita da

$$\|A\|_2 := \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

ed è data dalla formula

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ è autovalore di } A^T A\}} = \sqrt{\max\{\lambda : \lambda \text{ è autovalore di } A A^T\}}.$$

Inoltre, se $z \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore di $A^T A$ relativo al massimo autovalore di $A^T A$, allora $\|Az\|_2 = \|A\|_2 \|z\|_2$.