# Intro

## QFT :

Campi sono mappe da un manifold M a uno spazio N

metrica

Es. campo scalare

$$\phi : \mathbb{R}^{3,1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\eta^{\mu\nu}$

QM è una QFT 1 dim.

$$\bar{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

traiettorie $\qquad t$

$\mathcal{C}$ SPAZIO DELLE CONFIG. della QFT

$$= \{ \text{mappe} : M \to N \}$$

AZIONE funzionale

$$S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \longmapsto S[\phi]$$

pti critici $\{ \phi \in \mathcal{C} \mid \delta S[\phi] = 0 \}$

soluzioni delle e.o.m. (eq. del moto)

$S$ spesso è assunta essere è LOCALE

$$S[\phi] = \int_M d^d x \sqrt{g}\, \mathcal{L}\left( \phi(x), \partial\phi(x), \dots \right)$$

# finito di derivate

$\Downarrow$

e.o.m. sono PDEs

(il cui ordine è determinato dal # derivate)

Più generalm.

$$\underline{S[\phi]} = \int_M d^d x_1 \cdots \int_M d^d x_n \, \Lambda(x_1, \dots, x_n) \, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$$

non-locale

e.o.m. integro-diff.

→ il comportam. del campo in un pto $x$ dip. da come si comporta il campo su tutto $M$.

diventa locale se

$$\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x) \, \partial^{\mu_1} \delta^d(x_1 - x_2) \, \partial^{\mu_2} \delta^d(x_2 - x_3) \cdots$$

$$\int_M d^d x \, \lambda(x) \underbrace{\partial^{\mu_1}\phi(x) \cdots \partial^{\mu_n}\phi(x)}_{\#\text{ campi} > 2}$$

"termine di interazione"

tipicamente $\lambda$ è presa <u>costante</u> (cost. di accoppiamento)

# INTEGRALE SUI CAMMINI in QFT

Integrale normale

$\mathcal{C} \to \mathbb{R}^n \qquad f(z_1, \dots, z_N) \qquad f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dz_1 \cdots dz_N \, f(z_1, \dots, z_N)$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \; e^{-S[\phi]/\hbar}}$$

P.I. Euclideo

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \; e^{iS[\phi]/\hbar}$$

P.I. Minkow.

Se scelgo $\underline{\underline{M \quad \text{COMPATTO}}}$, il P.I. def. la FUNZIONE DI PARTIZIONE

$$Z_{(M,g)}(\lambda, \dots) = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \, e^{-S[\phi]/\hbar}$$

metrica su M

CORRELATORI ( funz. di Correlaz. , funz. di Green, ...)

$$\frac{1}{Z} \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i[\phi] \, e^{-S[\phi]/\hbar} \equiv \langle \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i \rangle$$

"insertion operators"

t.c. $\langle \mathbb{1} \rangle = 1$

Tipicamente $\mathcal{O}_i$ sono "operatori locali", x es.

$$\mathcal{O}(x) = \phi^4(x) \,, \quad \phi^3(x) \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x), \, e^{\phi(x)}, \dots$$

Qlche volta sono di interesse op. del tipo

$$\int d^d x \, (\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi)^2$$

$\langle \prod_{i=1}^{n} O_i \rangle$ dip. degli stessi parametri da cui dip. $Z$ $(M, \rho, \lambda, \dots)$;

in più dip. dalle pos. $x_i$ (se op. loc.)

# TEORIA DI CAMPO in $d=0$

$$M = \{\text{pto}\} \qquad d=0$$

- In $d=0$ non c'è una nozione di lunghezza, quindi no metrica.
- Inoltre il gruppo di Lorentz è triviale
  $\rightarrow$ no spin.
- Un CAMPO è una mappa

$$\phi : \{\text{pto}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{C} \equiv \mathbb{R}$$

- L'AZIONE è una funzione su $\mathbb{R}$.
- Non ci sono direzioni $\Longrightarrow$ non possiamo def. la derivata

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \phi \mapsto S(\phi)$$

- Tipicam. $S$ è un polinomio

$$S(\phi) = \sum_{p=0}^{n} a_p \phi^p$$

$p=0 \to$ "vacuum en"
$p=1 \to$ "tadpole"
$p=2 \to$ "mass term"

Es.

$$S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- Misura del P.I. diventa una ordinaria misura di Lebesgue

$$D\phi \longrightarrow d\phi$$

FUNZ. DI PARTIZIONE

$$Z(\lambda, m^2, \dots) = \int_{\mathbb{R}} d\phi \, e^{-S(\phi)/\hbar}$$

$\sum a_p \phi^p$

FUNZ. DI CORREL.

$$\langle f \rangle = \int d\phi \, f(\phi) \, e^{-S(\phi)/\hbar}$$

$$\Big[ \; \langle O(x_1)\, O(x_2) \dots \rangle \qquad \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle$$

$O[\phi(x_1)] \dots$

$$\equiv$$

$$\langle 0 | \mathbf{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

Funz. a due pti $\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle$

PROPAGATORE $\Big]$

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \longrightarrow \langle \phi^n \rangle$$

$$S = \sum_{p=1}^{n} a_p \phi^p$$

$$\langle \phi^p \rangle = \int d\phi \; \underline{\phi^p \, e^{-S(\phi)/\hbar}}$$

$$= -\frac{\hbar}{Z} \frac{\delta Z}{\delta a_p} \Big|$$

Quando $S$ è quadratica $\longrightarrow$ teoria libera

e F.d.P. $Z_0$

# TEORIE LIBERE

Consideriamo $n$ campi $\phi^a$ $\quad a=1,\dots,n$

$$\phi^a : \{pto\} \to \mathbb{R}$$

prendiamo

$$S(\phi) = \frac{1}{2} M_{ab}\, \underline{\phi^a \phi^b}$$

$M_{ab}$ matrice <u>reale</u> $n \times n$ <u>simm.</u>

$\Rightarrow$ FUNZ. DI PART. è un integrale Gaussiano

$$Z_0 = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi \; e^{-\sum_{a,b} M_{ab}\phi^a\phi^b/2\hbar}$$

indici ripetuti $\Updownarrow$ somma

$M_{ab}$ è reale simm. $\Rightarrow$ diagonalizzabile con trasf. ortogonale $\quad M \to \begin{pmatrix} m_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^2 \end{pmatrix}$

$$\vec{\phi} = O \cdot \vec{x}$$

$$Z_0 = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \; e^{-m_a^2 (x^a)^2/2\hbar} = \prod_{a=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m_a^2}} =$$

$$= \frac{(2\pi\hbar)^{n/2}}{\underline{\left(\prod_a m_a^2\right)^{1/2}}} = \frac{(2\pi\hbar)^{n/2}}{(\det M)^{1/2}}$$

Se $M$ è def. pos.

$\Downarrow$

$\det M > 0$

e l'integrale è ben def.

Aggiungiamo una "sorgente" all'azione

$\uparrow$

$J_a$

$$S(\phi) = \frac{1}{2} M_{ab} \phi^a \phi^b + J_a \phi^a$$

$$\underline{Z_0(J)} = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi \; e^{-\frac{1}{2\hbar} M_{ab}\phi^a\phi^b} e^{-J_a\phi^a/\hbar}$$

$$\langle \phi^a \phi^b \rangle = \frac{\hbar^2}{Z_0(0)} \underline{\frac{\partial^2}{\partial J_a \partial J_b}} Z_0(J) \Big|_{J=0}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi \; \underbrace{e^{-\frac{1}{2\hbar} M_{ab}\phi^a\phi^b} \; e^{-J_a\phi^a/\hbar}}$$

$$=$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} M_{ab}\phi^a\phi^b + J_a\phi^a + \frac{1}{2}(M^{-1})^{ab}J_aJ_b} - \frac{1}{2}(M^{-1})^{ab}J_aJ_b =$$

$$= \frac{1}{2}\left( \underline{\phi^a + (M^{-1})^{ac}J_c} \right) M_{ab} \left( \phi^b + (M^{-1})^{bd}J_d \right) - \frac{1}{2}(M^{-1})^{ab}J_aJ_b$$

cambiamo variabili di integrazione

$$\phi \to \phi + M^{-1}J \equiv \tilde{\phi}$$

$$= \underbrace{\left[ \int_{\mathbb{R}^n} d^n\tilde{\phi} \; e^{-\tilde{\phi}^a M_{ab}\tilde{\phi}^b/2\hbar} \right]}_{Z_0(0)} \cdot \underline{e^{\frac{1}{2\hbar} J_a (M^{-1})^{ab} J_b}}$$

$$Z_0(J) = Z_0(0) \cdot e^{\frac{1}{2\hbar} J_a (M^{-1})^{ab} J_b}$$