INTRO

SPAZIO VETTORIALE V def. su $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $\mathbb{C}$

è un insieme di oggetti che chiamiamo VETTORI

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \in V$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

su cui definiamo operazioni $+$, prodotto per numero

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$

$\alpha \cdot \vec{v}_1 \in V$

t.c. $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono LIN. DIP. se $\exists$ una $\underbrace{\text{COMBINAZ. LINEARE}}$ nulla

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_m\vec{v}_m = 0$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i$$

BASE per V: insieme di vettori lin. indip.

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$\forall \vec{v} \in V \quad \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$$

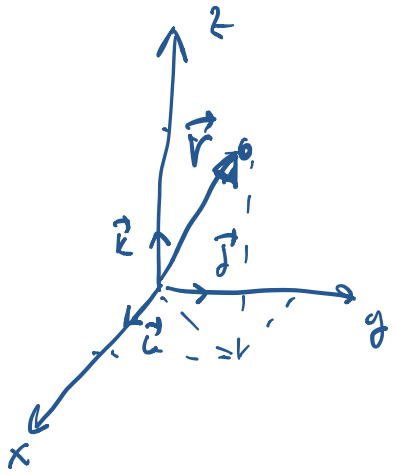
$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

componenti del vettore

Es.

$V = \mathbb{R}^3$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \mapsto \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

Norma

$$\rightsquigarrow \|\vec{v}_1\|^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$$

In una base ortonormale, $\underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{= \delta_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

$$\vec{V}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \qquad \left(\sum_{\phi=1}^{n} \alpha_\phi \vec{e}_\phi \right)$$

$$\vec{V}_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{e}_j$$

$$\underline{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{e}_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\vec{e}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{e}_j \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{= \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boxed{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_{ij}} =$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_{ij}} = \beta_1 \delta_{i1} + \beta_2 \delta_{i2} + \dots + \beta_n \delta_{in} =$$

$$= 0 + 0 + 0 \dots + \beta_i \underbrace{\delta_{ii}}_{=1} + 0 + 0$$

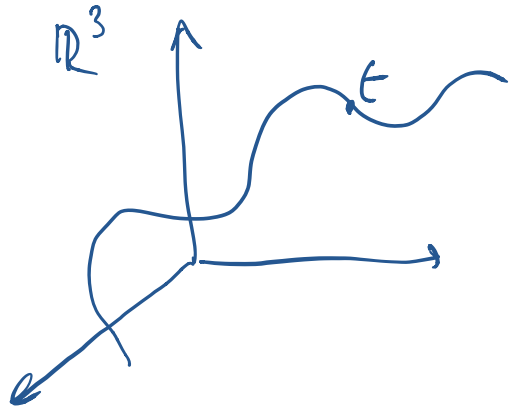
$$= \underline{\beta_i} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

EQ. DIFF. ORDINARIE

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} \qquad (3d)$$

$$\bar{x}(t) \qquad \bar{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$



<u>1d</u>

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto x(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

$$\ddot{x} = \frac{F(x, \dot{x}, t)}{m} \equiv f(x, \dot{x}, t)$$

2ª legge di Newton in sistemi 1d

$$\underbrace{\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)}_{\text{"forma normale"}}$$

se f è INDIP. da t, l'eq. si dice AUTONOMA

Se f è lin. in $x, \dot{x}$ (*) l'eq. si dice LINEARE

Equazione (diff.) in cui l'incognita è la funzione $x(t)$

(*) cioè $f(x, \dot{x}) = ax + b\dot{x} + c$

ES 1) PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0$$

$$x(t) = at + b$$

"SOLUZIONE GENERALE"

a, b parametri liberi

(Per una scelta di (a,b) abbiamo una "soluzione particolare")

$(a,b) = (1,0)$ $x(t) = t$ $(a,b) = (0,1)$ $x(t) = 1$

ES 2) OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$x(t) = \underline{\underline{a}} \cos(\omega t) + \underline{\underline{b}} \operatorname{sen}(\omega t)$$

2 parametri liberi

$$= \underline{\underline{A}} \cos(\omega t + \underline{\underline{\varphi}})$$

$$= \underline{\underline{C}} e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$$

$$\underline{\underline{C}} = \operatorname{Re} C + i \operatorname{Im} C$$

ES 3) REPULSORE ARMONICO

$$\rightarrow \ddot{x} = \omega^2 x$$

$$x(t) = \underline{\underline{a}} e^{\omega t} + \underline{\underline{b}} e^{-\omega t}$$

$$= \underline{\underline{A}} \cosh \omega t + \underline{\underline{B}} \operatorname{senh} \omega t$$

Soluz. generale è una combinazione lineare di $\underline{\underline{2}}$ soluz. particolari

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE : soluz. gen è comb lin. di sol. part.

Vale per le EQ. DIF. $\underline{\underline{\text{OMOGENEE}}}$ LINEARI

Eq. diff. lin.

$$f(x, \dot{x}) = ax + b\dot{x} + c$$

Eq. diff. lin. OMOGENEA $\left[f(\lambda x, \lambda \dot{x}) = \lambda f(x, \dot{x}) \right.$

$$f(x, \dot{x}) = ax + b\dot{x}$$

$$f(\lambda x, \lambda \dot{x}) = a\lambda x + b\lambda \dot{x} =$$
$$= \lambda(ax + b\dot{x})$$

Se si aggiunge un termine NON-omogeneo

↳ soluz. generale è la somma di una soluz. particolare e della soluz. generale dell'eq. omogenea associata

ES) $\ddot{x} = -g$ ⇝ omogenea associata: $\ddot{x} = 0$

↓ soluz. particolare

$$-\frac{1}{2} g t^2$$

↓ sol gen. omog.

$$x(t) = at + b$$

soluz. gen. $x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + at + b$

ES 5) PENDOLO

$$\ddot{x} = -\omega^2 \operatorname{sen} x$$

non-lineare

soluz. richiede funzioni ellittiche

ES 6) CADUTA FRENATA

$$\ddot{x} = -\beta \dot{x} - g \rightsquigarrow$$ eq. omog. associata $$\ddot{x} = -\beta \dot{x}$$

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v} = -\beta v$$

$$v(t) = \alpha e^{-\beta t}$$

$$x(t) = b - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}$$

$$= b + a e^{-\beta t}$$

soluz. part.

$$x(t) = \underbrace{-\frac{g}{\beta}}_{= v_\infty} t$$

soluz. gen.

$$x(t) = v_\infty t + a e^{-\beta t} + b$$

ES 7) OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x}$$

eq. lin. e omogenea

Soluz.

solut. particolare $e^{\lambda t}$

↓ mettiamo in eq.

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -\omega^2 \cancel{e^{\lambda t}} - 2\mu\lambda \cancel{e^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \mu^2 - \omega^2$$

$\mu > \omega$

GRANDE SMORZAMENTO

$$x(t) = a e^{+\lambda_1 t} + b e^{+\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0$$

$\mu < \omega$

PICCOLO SMORZAMENTO

$$x(t) = e^{-\mu t}(a \cos \sigma t + b \sin \sigma t)$$

$$\sigma \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$$

$\mu = \omega$

SMORZAM. CRITICO

$$x(t) = (a + bt) e^{-\mu t}$$

ES 8 | Eq. di Van der Pol

$$\ddot{x} + \beta(x^2-1)\dot{x} + x = 0 \qquad \beta > 0$$

- attrito positivo per $|x| > 1$
- " negativo " $|x| < 1$

$\downarrow$

Fenomeno del CICLO LIMITE:

- per moti di grande ampiezza prevale attrito positivo $\Rightarrow$ ampiezza si riduce
- per moti di piccola ampiezza prevale attrito negativo $\Rightarrow$ ampiezza aumenta
- per un solo moto CRITICO i due effetti si compensano $\Rightarrow$ moto periodico

Per grandi t, il moto tende al ciclo limite, cioè a un moto periodico

(Poincaré-Bendixson)