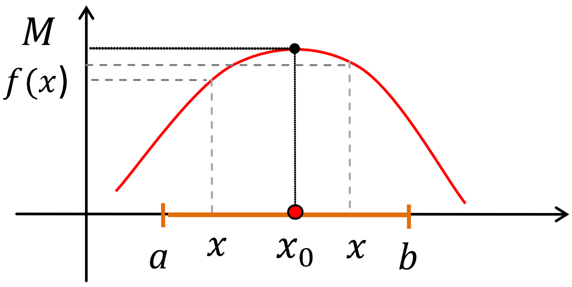
# Teorema sui massimi e minimi di una funzione (teorema di Fermat)

## enunciato




Sia:

- $f(x)$ una funzione
- $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato appartenente al dominio D della funzione
- $x_0$ un punto di massimo o minimo relativo della funzione interno ad $[a, b]$

se $f(x)$ è derivabile in $x_0$ allora $f'(x_0) = 0$

## dimostrazione

| | |
|---|---|
| $\exists\, I_{x_0} : f(x_0) \geq f(x) \;\; \forall\, x \in \left( I_{x_0} \cap D \right)$ | supponiamo che $x_0$ sia un punto di massimo relativo. Allora, per definizione di massimo relativo si ha |
| $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ | consideriamo il rapporto incrementale di $f(x)$ in $x_0$ |
| se $x > x_0$ allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-}{+} \leq 0$<br>se $x < x_0$ allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-}{-} \geq 0$ | e determiniamo il segno del rapporto incrementale nei due casi in cui $x$ sia maggiore o minore di $x_0$ |
| $\lim_{x \to {x_0}^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \leq 0$<br>$\lim_{x \to {x_0}^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \geq 0$ | calcolando il limite per $x \to x_0$ di entrambi i rapporti incrementali si ottiene la derivata destra e la derivata sinistra di $f(x)$ in $x_0$ |
| $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ | essendo per ipotesi la funzione derivabile in $x_0$ la derivata destra deve essere uguale alla derivata sinistra.<br>Questo è possibile solo se sono entrambe uguali a zero, cioè la tesi |

## osservazione

Il teorema di Fermat non si inverte. Infatti se la derivata prima in un punto $x_0$ è uguale a zero, il punto $x_0$ può essere un punto di massimo relativo, di minimo relativo e potrebbe anche essere un punto di flesso a tangente orizzontale.