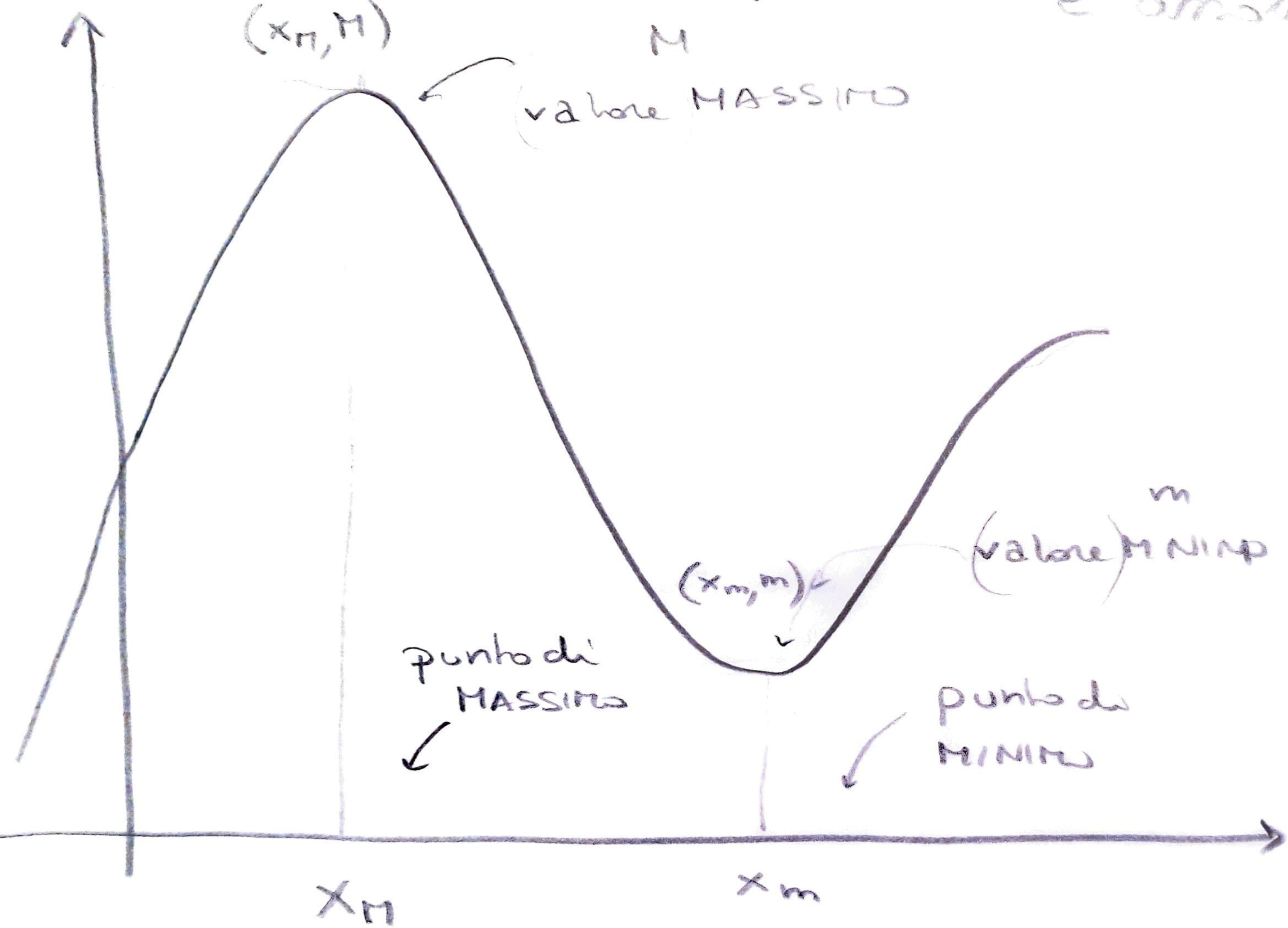
MASSIMO/MINIMO relativo e assoluto | Punti ESTREMALI di f



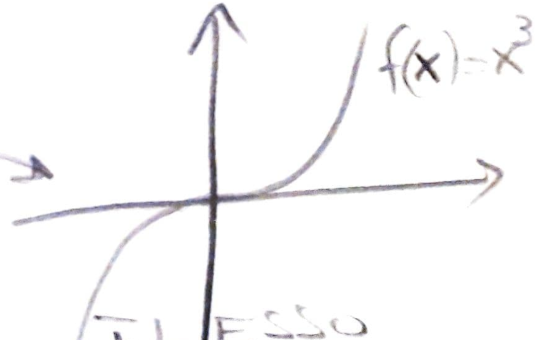
Teorema di Fermat

Se f ha un minimo o massimo nel punto x_0 (cioè se $f(x_0)$ è minimo o massimo di f) e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0)=0$

ATTN Non è vero il viceversa

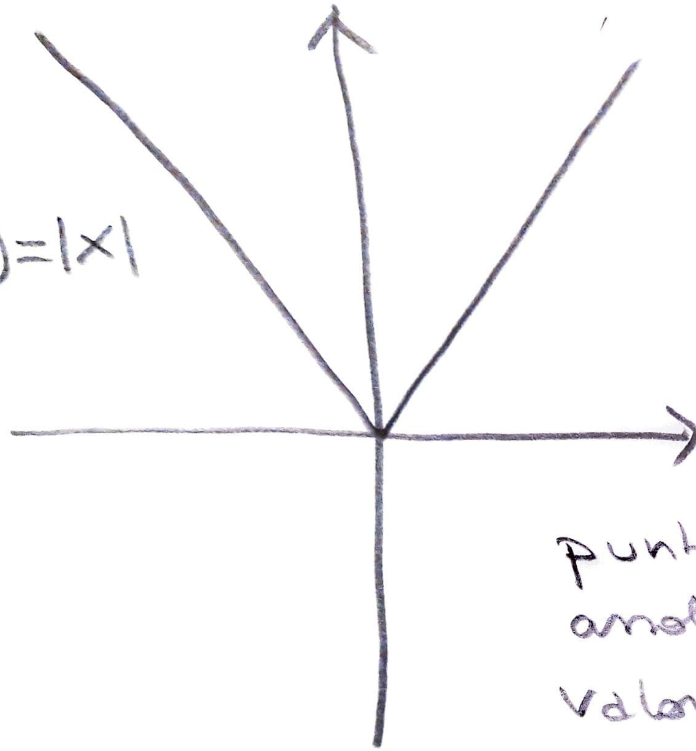
$f(x)=x^3$ $\qquad f'(x)=3x^2$ $\qquad 3x^2=0 \iff x=0$

MA f NON ha né massimo né minimo in $x=0$ in quanto f è monotona crescente

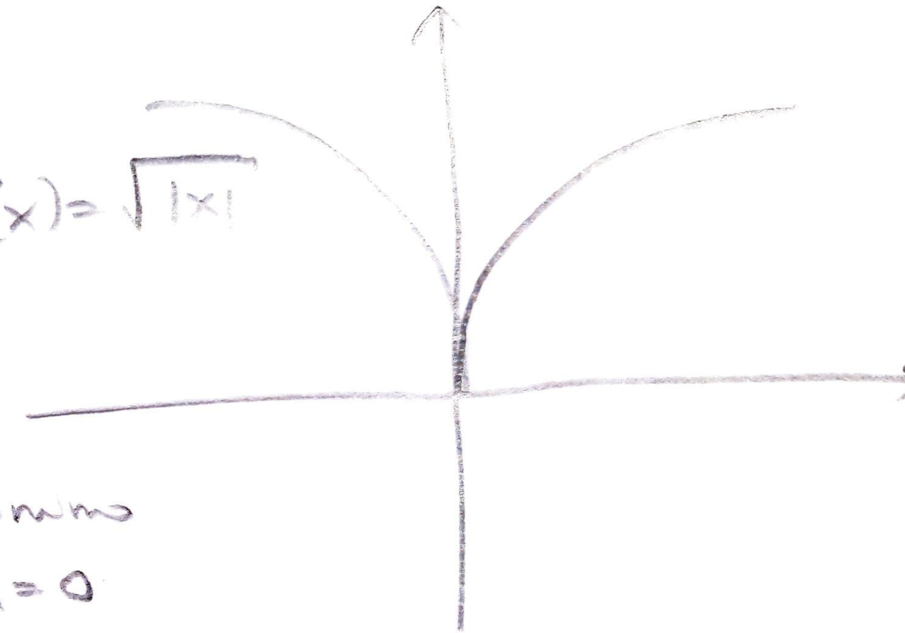


$x_0=0$ è un punto di FLESSO ORIZZONTALE

$f(x)=|x|$



$f(x)=\sqrt{|x|}$



punto di minimo assoluto $x_m = 0$

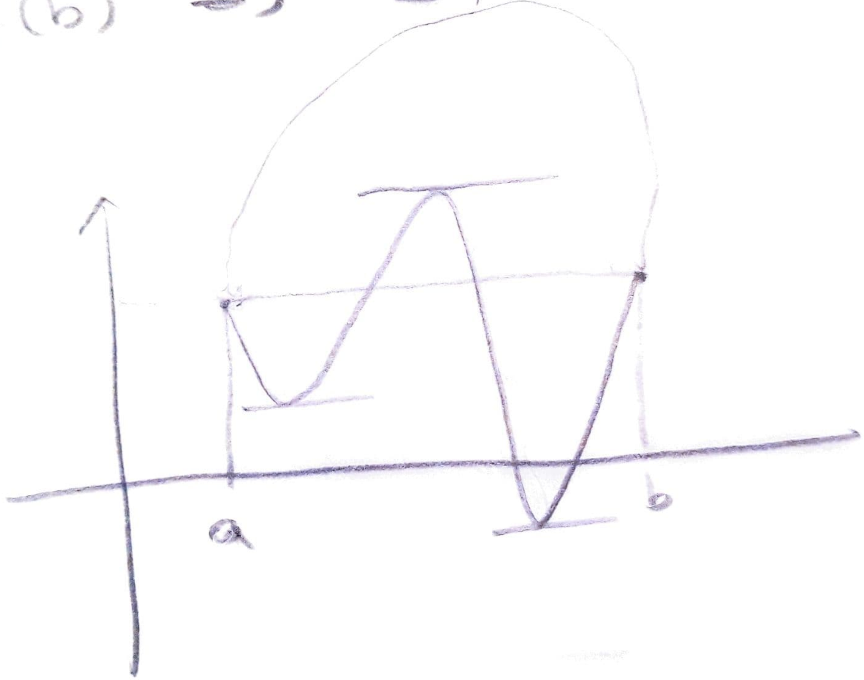
valore minimo 0

MA entrambe le funzioni NON sono derivabili in $x_m=0$!

Teorema di Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b).

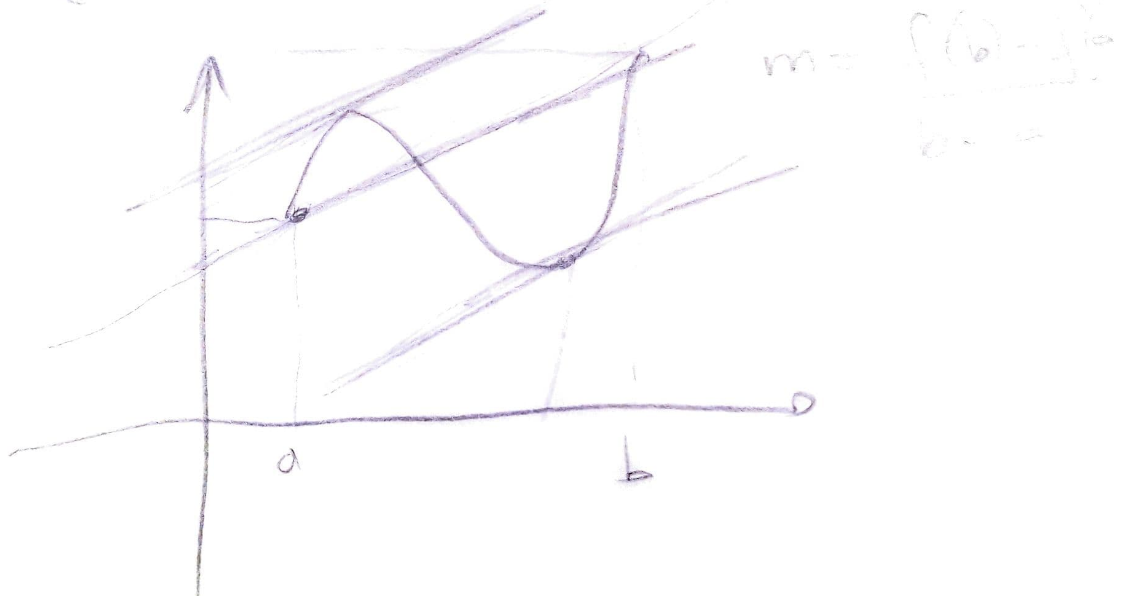
$f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : f'(c)=0$.



Teorema di Lagrange

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;:\; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



f non derivabile in x_0

NON VALE L'ENUNCIATO del Teorema di Lagrange

<u>Corollario</u> f derivabile in $[a,b]$

f è costante $\Longleftrightarrow$ $f'(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

eq retta tangente al grafico di f passante per il punto $(x_0, f(x_0))$

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

$(x_0, f(x_0))$

Def Sia f derivabile in un intorno I di x_0

Si dice che f è CONVESSA in I se
(CONCAVA)

$\forall x, x_0 \in I$ $\quad f(x) \geq f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$(\leq)$

x_0

Oss $f'(x)$ crescente $\nearrow$ $\qquad$ $\nwarrow$ $f'(x)$ decrescente

Derivata seconda

Sia f derivabile in (a,b) e supponiamo f' ancora derivabile in (a,b), allora la funzione

$$\frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x)$$

è detta <u>derivata seconda</u> di f.

<u>Es</u> $f(x) = x^2 + 2\cos x \quad f'(x) = 2x - 2\operatorname{sen} x$

$$f''(x) = 2 - 2\cos x$$

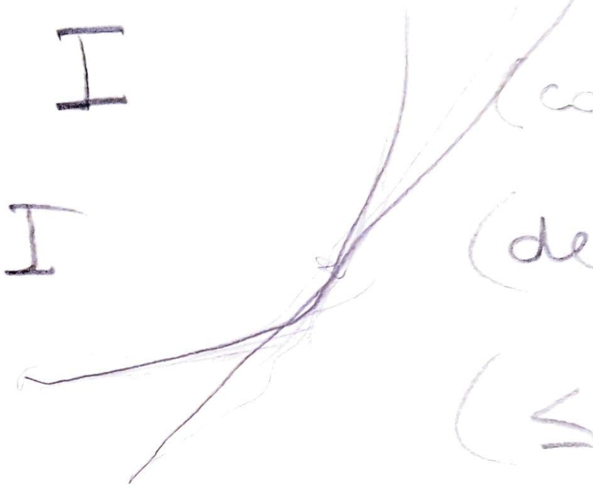
derivabile $\forall x \geq 0$

$$f(x) = x^{3/2} \qquad f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

NON È DERIVABILE in $x=0$

__Proposizione__ Sia f 2-volte derivabile in I.

- f convessa in I (concava)
- f' crescente in I (decrescente)
- $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ (≤ 0)



__Def__ Se

$f(x)$ è convessa per $x \geq x_0$
(concava

e concava per $x \leq x_0$, allora
(convessa)

x_0 è detto PUNTO di FLESSO di f

<u>Conseguenza</u>

Sia f due volte derivabile in un intorno di x_0; allora

x_0 è punto di flesso per f

$\Longleftrightarrow f''(x_0)=0$