# Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 2

1. **P** Stabilire l'integrabilità in senso generalizzato e, in caso affermativo, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+10x+50)(x^2-10x+50)}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt; \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{e^{3t}-e^t}\,dt;$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+3)}\,dx; \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx; \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,dx; \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^8+1}\,dx; \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{x^8+1}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\cos(e^{2x})\,dx; \quad \int_{-\infty}^{0} e^{x}\sin(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx; \quad \int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx.$$

2. **P** Stabilire l'integrabilità in senso generalizzato e, in caso affermativo, calcolare l'integrale

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx; \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx; \quad \int_{0}^{1} \frac{e^t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{e^{3t}-e^t}\,dt; \quad \int_{0}^{1} \frac{\cos(t)}{e^{3t}-e^t}\,dt.$$

3. **P** Stabilire, al variare del parametro $\alpha$, $\alpha > 0$, l'integrabilità in senso generalizzato e, in caso affermativo, calcolare l'integrale

$$\int_{0}^{1/2} \frac{1}{x(-\log x)^{\alpha}}\,dx.$$

4. **P** Stabilire l'integrabilità in senso generalizzato e, in caso affermativo, calcolare l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx; \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx; \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx.$$

5. **P**$*$ Stabilire l'integrabilità in senso generalizzato di

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x-\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Suggerimento: studiare l'integrabilità della funzione sull'insieme degli $x \geq 2$ tali che $\sin(x) \geq 1/2$.

6. **P** Stabilire l'integrabilità in senso generalizzato

$$\int_{-\infty}^{0} (\arctan(x)+\pi/2)^2\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(t^5)}\,dt;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+3t^2+\sin(\sqrt{t})}\,dt; \quad \int_{-\infty}^{-2} \frac{\log(-t)}{1+3t+\sin(t)}\,dt.$$

7. **P** Stabilire l'integrabilità in senso generalizzato

$$\int_0^{3} \frac{\log(1+2\sqrt{x})}{x(x+4)}\,dx; \quad \int_{1/2}^{1} \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sin(x^2)}\,dx; \quad \int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}\,dx.$$

8. **T**$*$ Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo illimitato. Sia

$\tilde{\mathcal{R}}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} :\ f$ è Riemann integrabile in senso generalizzato su $I\}$.

Dimostrare che per ogni $f, g \in \tilde{\mathcal{R}}(I)$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha che $(\lambda f + \mu g) \in \tilde{\mathcal{R}}(I)$ (cioè $\tilde{\mathcal{R}}(I)$ è uno spazio vettoriale) e vale

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

Ricordare che si suppone di sapere che valga l'analogo risultato per $I$ intervallo limitato.

Suggerimento: è facile dimostrare, usando la parte positiva e la parte negativa, che $\lambda f$ e $\mu g$ appartengono a $\tilde{\mathcal{R}}(I)$ e vale

$$\int_I \lambda f = \lambda \int_I f \quad \text{e} \quad \int_I \mu g = \mu \int_I g.$$

È sufficiente quindi dimostrare che $(f+g) \in \tilde{\mathcal{R}}(I)$ e vale

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g. \tag{1}$$

Iniziare con il caso facile in cui $f$ e $g$ siano non negative. Per l'integrabilità nel caso generale, osservare che $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ e $(f+g)^- \leq f^- + g^-$. Infine dimostrare (1) nel caso generale.

9. **T** Sia $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri non negativi e sia $c = \lim_n c_n$. Dimostrare che se $0 < c < +\infty$, allora si ha
$$\lim_n \,(c_n)^{1/n} = 1.$$

10. **P** Determinare il raggio di convergenza $r$ delle seguenti serie di potenze. Se $0 < r < +\infty$, stabilire il comportamento della serie per $x = r$ e per $x = -r$.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^{2n+1}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^{4n^2};$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi/2) x^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-n} x^n.$$

11. **P** Determinare, al variare del parametro $a$, $a > 0$, il raggio di convergenza $r$ della seguente serie di potenze. Se $0 < r < +\infty$, stabilire il comportamento della serie per $x = r$ e per $x = -r$.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{\sqrt{n}} x^n.$$

12. **P**$*$ Determinare, al variare del parametro $a$, $a > 0$, il raggio di convergenza $r$ della seguente serie di potenze. Se $0 < r < +\infty$, stabilire il comportamento della serie per $x = r$ e per $x = -r$.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+a^n}.$$

13. **P** Determinare il raggio di convergenza $r$ delle seguenti serie di potenze. Se $0 < r < +\infty$, stabilire se la serie converge o meno per $x = r$ e per $x = -r$.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2+\sin(n)) x^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(-n^3+3n) x^n;$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ oppure } \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n x)^n \text{ dove } a_n = n^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

14. **P** Sviluppare in serie di Taylor in 0 le seguenti funzioni

$$f(x) = x\sin(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = x^{-2}(x + \log(1-x)), \quad x \in (-1,1);$$

$$f(x) = \cosh(x^2)(2+x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = x^2 e^x - \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. **P** Sviluppare in serie di Taylor in 0 la funzione $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Determinare lo sviluppo in serie di Taylor in 0 della sua primitiva $h$ tale che $h(0) = 0$.

16. **P** Sviluppare in serie di Taylor in 0 la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Determinare quindi lo sviluppo in serie di Taylor in 0 di $\arctan(x)$, $x \in (-1,1)$. Dedurre infine che

$$\pi/4 = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**Legenda**:
**T** esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile