Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 3

1. **T** Sia (X, d) uno spazio metrico. Determinare la frontiera di X e dell'insieme vuoto.

2. **T** Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che ogni successione di Cauchy in X che ammette una sottosuccessione convergente (a un punto $x \in X$) è convergente (allo stesso punto $x \in X$).

   Dedurre che se X è compatto, allora è completo.

3. **T** Sia X un insieme e siano d_a e d_b due distanze su X. Per ogni $x_0 \in X$ e $r > 0$, siano $B^a(x_0, r) = \{x \in X : \; d_a(x, x_0) < r\}$ e $B^b(x_0, r) = \{x \in X : d_b(x, x_0) < r\}$.

   Supponiamo che per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $r > 0$ esistano $r_a, r_b > 0$ (dipendenti da x_0 e r) tali che

   $$B^a(x_0, r_a) \subset B^b(x_0, r) \quad \text{e} \quad B^b(x_0, r_b) \subset B^a(x_0, r).$$

   Dimostrare che $A \subset X$ è aperto rispetto alla distanza d_a se e solo se lo è rispetto alla distanza d_b.

4. **P** Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ definiamo

   $$d_a(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

   Dimostrare che d_a definisce un metrica su $\mathbb{R}$. Dimostrare inoltre che

   - $\mathbb{R}$ con questa metrica è limitato, cioè esiste $r > 0$ tale che $\mathbb{R} \subset B_r(0)$ dove $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : \; d_a(x, 0) < r\}$. Dedurre che questa distanza non proviene da nessuna norma su $\mathbb{R}$.
   - $\mathbb{R}$ con questa metrica non è completo. (Chiaramente $\mathbb{R}$ è chiuso in $(\mathbb{R}, d_a)$ quindi chiuso e limitato in uno spazio metrico non implica compatto!)
   - $A \subset \mathbb{R}$ è aperto rispetto alla distanza d_a se e solo se lo è rispetto alla distanza euclidea. (La completezza è quindi una proprietà della metrica, non dipende solo dalla famiglia degli insiemi aperti).

5. **T*** Sia (X, d) spazio metrico e sia $S \subset X$. Dimostrare che $S_1 \subset S$ è aperto (rispettivamente chiuso) in S se e solo se esiste A aperto in X tale che $S_1 = A \cap S$ (rispettivamente esiste C chiuso in X tale che $S_1 = C \cap S$).

   Dedurre che se $S_1 \subset S$ è aperto (rispettivamente chiuso) in X allora lo è anche in S.

   Concludere infine che se S è aperto (rispettivamente chiuso) in X, allora $S_1 \subset S$ è aperto (rispettivamente chiuso) in S se e solo se lo è in X.

Suggerimento: osservare che per ogni $x_0 \in S$ e $r > 0$, la palla $B^S(x_0, r) = \{x \in S : \ d(x, x_0) < r\}$ di centro x_0 e raggio r in S è data anche da

$$B^S(x_0, r) = B^X(x_0, r) \cap S$$

dove $B^X(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}$ è la palla di centro x_0 e raggio r in X. Da questa osservazione, non è difficile ricavare che se $S_1 = A \cap S$ con A aperto in X allora S_1 è aperto in S. L'altra implicazione è più complicata: bisogna osservare che se S_1 è aperto in S, per ogni $x \in S_1$ esiste $r_x > 0$ tale che $B^S(x, r_x) \subset S_1$; quindi si ha

$$S_1 = \bigcup_{x \in S_1} B^S(x, r_x)$$

e da questa rappresentazione bisogna costruire A.

6. **P** Sia $\mathbb{R}$ spazio metrico con la distanza euclidea. Sia $S = (0, 1]$.

   Stabilire se i seguenti sottoinsiemi S_1 di S sono aperti o chiusi in S e per ciascuno di essi determinare l'interno in S, la chiusura in S e la frontiera in S.

   $$S_1 = S; \quad S_1 = (1/2, 1); \quad S_1 = (1/2, 1]; \quad S_1 = (0, 1/2); \quad S_1 = (0, 1/2];$$
   $$S_1 = (1/2, 3/4); \quad S_1 = (1/2, 3/4]; \quad S_1 = [1/2, 3/4].$$

7. **P**$*$ Sia $\mathbb{R}$ spazio metrico con la distanza euclidea. Sia $S = \mathbb{Q}$.

   Stabilire se i seguenti sottoinsiemi S_1 di S sono aperti o chiusi in S e per ciascuno di essi determinare l'interno in S, la chiusura in S e la frontiera in S.
   $$S_1 = S; \quad S_1 = (-1, 1) \cap \mathbb{Q}; \quad S_1 = [-1, 1] \cap \mathbb{Q};$$
   $$S_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}; \quad S_1 = (-\sqrt{2}, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

8. **P** Su $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ intero, definiamo le seguenti norme: per ogni $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$

   $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2}; \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}.$$

   Dimostrare che queste sono norme. Per $N = 2$, disegnare la palla centrata in 0 e di raggio 1 rispetto a ciascuna delle distanze indotte da queste norme.

9. **P** Siano $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ due norme su uno spazio vettoriale V. Diremo che le due norme sono topologicamente equivalenti se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che

   $$C_1 \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C_2 \|x\|_b \quad \text{per ogni } x \in V.$$

   Per ogni $x_0 \in V$ e $r > 0$, siano $B^a(x_0, r) = \{x \in V : \ \|x - x_0\|_a < r\}$ e $B^b(x_0, r) = \{x \in V : \ \|x - x_0\|_b < r\}$.

   Dimostrare, utilizzando l'Esercizio 3, che gli insiemi aperti rispetto alla (distanza indotta dalla) norma $\|\cdot\|_a$ e alla norma $\|\cdot\|_b$ coincidono.

10. **P** Dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^N$ sono a due a due topologicamente equivalenti.

    Suggerimento: studiare prima l'equivalenze tra le norme 1 e 2 e quella ∞, e da queste dedurre quella tra le norme 1 e 2.

11. **T** Sia V uno spazio vettoriale normato. Dimostrare che la norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ è una funzione continua rispetto alla distanza su V associata alla norma.

12. **T** Sia V uno spazio vettoriale reale con il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dimostrare che la norma associata verifica l'identità del parallelogramma:

    $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$

    Dimostrare che le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^2$ non provengono da un prodotto scalare.

    Suggerimento: trovare dei vettori per cui non valga l'identità del parallelogramma.

13. **T** Sia $f : S \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, con componenti $f_i : S \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, M$. Sia $x^0 \in S$. Dimostrare che f è continua in x^0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti f_i, $i = 1, \dots, M$.

    Suggerimento: utilizzare l'equivalenza dell'Esercizio 10 tra le norme 2 e ∞.

14. **T** Dimostrare che per ogni $L \in (\mathbb{R}^N)^*$ esiste uno e un unico $y \in \mathbb{R}^N$ tale che

    $$L[x] = \langle y, x\rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$

    dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^N$.

15. **T** Sia $y \in \mathbb{R}^N$. Dimostrare che

    $$\|y\| = \sup_{\|x\|=1} \langle y, x\rangle = \max_{\|x\|=1} \langle y, x\rangle.$$

    In particolare, dimostrare quindi che esiste $x \in \mathbb{R}^N$ tale che $\|x\| = 1$ e

    $$\|y\| = \langle y, x\rangle.$$

16. **T** Sia $A \in \mathcal{M}^{N\times N}(\mathbb{R})$ una matrice $N \times N$ a valori reali e sia A^T la matrice trasposta di A. Dimostrare che per ogni v, $w \in \mathbb{R}^N$ si ha

    $$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^T w\rangle.$$

17. **T** Siano $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e $L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L)$ due applicazioni lineari. Dimostrare che $L_2 \circ L_1$ appartiene a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^L)$.

    Inoltre siano $A_1 \in \mathcal{M}^{M\times N}(\mathbb{R})$ e $A_2 \in \mathcal{M}^{L\times M}(\mathbb{R})$ le matrici associate a L_1 e L_2 rispettivamente e $C \in \mathcal{M}^{L\times N}(\mathbb{R})$ quella associata a $L_2 \circ L_1$. Dimostrare che

    $$C = A_2 \cdot A_1,$$

    dove $\cdot$ indica l'usuale prodotto righe per colonne.

18. **P** Determinare in quali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sono continue le seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e

$f_1(x,y) = \cos(xy) f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|^3+|y|^3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

19. **P** Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

20. **P** Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

21. **P** Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+3y^4 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

22. **P** Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+3y^4 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

23. **P** Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

24. **P** Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

25. **P** Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

26. **P** Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ (x - 3/2)^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

27. **P** Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 1 \leq y \leq \cos(2x/\pi)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

28. **P** Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^4,\ x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

29. **P** Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x - y\} \subset \mathbb{R}^3$.

    Stabilire se C è aperto o chiuso, se è limitato. Determinare e descrivere l'interno, la chiusura e la frontiera di C.

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile