Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 6

1. **P** Calcolare la matrice Hessiana della funzione f in ogni punto del suo dominio dove f è data da

   (a) $f(x,y) = e^x y + xy^2$

   (b) $f(x,y) = \tan(x^2+y^2) - \dfrac{1}{xy}$

   (c) $f(x,y,z) = xz^3 - \log(x + y^2 z^2)$

2. **T** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, A aperto. Dimostrare che f è di classe C^k su A, per $k \geq 1$, se e solo se esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali di ordine k.

   Suggerimento: usare il Teorema del Differenziale Totale.

3. **T** Sia $N \geq 2$ e sia $P_2(x)$ un polinomio omogeneo di grado 2 in N variabili dato da
$$P_2(x) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$$
   dove a_{ij} è un numero reale, per ogni $i,j = 1,\dots,N$. Scrivere P_2 nella forma
$$P_2(x) = \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha x^\alpha,$$
   dove $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ è una N-upla di numeri interi non negativi (N-*multiindice*) e $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, esprimendo i coefficienti b_α in termini dei coefficienti a_{ij}.

4. **T** Sia $P_3(x) = P_3(x_1,x_2,x_3)$ un polinomio omogeneo di grado 3 in 3 variabili dato da
$$P_3(x) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ijk} x_i x_j x_k$$
   dove a_{ijk} è un numero reale, per ogni $i,j,k = 1,2,3$. Scrivere P_3 nella forma
$$P_3(x) = \sum_{|\alpha|=3} b_\alpha x^\alpha,$$
   dove α è un 3-multiindice, esprimendo i coefficienti b_α in termini dei coefficienti a_{ijk}.

5. **T** Sia $N \geq 2$ e sia $P_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, un polinomio omogeneo di grado 2 in N variabili dato da
$$P_2(x) = \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha x^\alpha \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$

dove α è un N-multiindice e b_α è un numero reale, per ogni α.

Determinare, in funzione dei coefficienti b_α, una matrice $N \times N$ A tale che $P_2(x) = \langle Ax, x\rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrare quindi che esiste una matrice $N \times N$ simmetrica $\tilde{A}$ tale che

$$P_2(x) = \langle \tilde{A}x, x\rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Calcolare gli elementi $\tilde{a}_{ij}$ della matrice $\tilde{A}$, $i, j = 1, \ldots, N$, sia in funzione degli elementi della matrice A che dei coefficienti b_α.

6. **P** Sia data la funzione $f(x, y, z) = \cos(xy) - e^{2zx}$. Calcolare $D^\alpha f(1, 0, -1)$ per i seguenti 3-multiindici α

$$\alpha = (2, 1, 0); \quad \alpha = (1, 1, 2); \quad \alpha = (2, 0, 2).$$

7. **T** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, A aperto, $x^0 \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile k volte in x^0, $k \geq 1$. Sia P il polinomio di Taylor di grado k della funzione f nel punto x^0. Dimostrare che per ogni multiindice α, con $|\alpha| \leq k$, si ha

$$D^\alpha P(x^0) = D^\alpha f(x^0).$$

8. **P** Sia data la funzione $f(x, y) = 2 - x + 2y - xy + x^3 + 2x^2y - xy^2$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 0)$ e nel punto $(-1, 0)$ (nella rappresentazione canonica). Calcolare quindi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 0).$$

9. **P** Sia data la funzione $f(x, y, z) = 3 - 2y + xz + y^2 + 2x^2z - yz^2 + z^3$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 0, 0)$ e nel punto $(1, 0, -1)$ (nella rappresentazione canonica). Calcolare quindi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1, 0, -1).$$

10. **P** Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(x - y^2)$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 1)$.

11. **P** Sia data la funzione $f(x, y, z) = ze^{2x+yz}$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f nel punto $(1, 0, 1)$.

12. **PF** Calcolare il polinomio di Taylor di grado k per la funzione f nel punto 0 dove

    (a) $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ e $k = 3$

    (b) $f(x, y) = ye^{xy+2x^3}$ e $k = 5$

    (c) $f(x, y, z) = xz\log(1 + y^2z) + \cos(x^2 - y^2)$ e $k = 7$

13. **TF** Sia $N = 4$. Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado k ($k \geq 0$) in N variabili.

    Suggerimento: calcolare quanti sono gli N-multiindici α di peso k. Ragionare per induzione su N. Il caso $N = 1$ è banale. Risolvete il problema per $N = 2$ e ogni $k \geq 0$. Quanti sono i 3-multiindici di peso k? Sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, fissate $\alpha_3 = j$, j intero compreso tra 0 e k, e contate quanti sono i 3-multiindici di peso k per cui $\alpha_3 = j$. Sommate poi per j che varia da 0 a k. Risolto il caso $N = 3$ potete procedere analogamente per il caso $N = 4$.

14. **TF** Sia α un N-multiindice di peso k, $k \geq 1$. Dimostrare che gli elementi del tipo $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, con $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, N$, che sono uguali a x^α sono in numero di
$$\frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!}.$$

    Suggerimento: si consideri il caso $N = 2$. Si osservi che il binomio di Newton afferma che
$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_1^j x_2^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x_1^j x_2^{k-j}.$$

    Ma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ è tale che $|\alpha| = k$ se e solo se $\alpha = (j, k - j)$, $j = 0, \dots, k$. Quindi il binomio di Newton si legge anche
$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

    Il caso $N = 2$ è quindi dimostrato. Provare quindi a dimostrare la formula generale per induzione su N.

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile