Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 1

1. Sia X uno spazio vettoriale reale. Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X che siano topologicamente equivalenti, cioè esistano due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che
$$C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2 \quad \text{per ogni } x \in X.$$
Per ogni $x_0 \in X$ e $r > 0$, siano $B^1(x_0, r) = \{x \in X : \ \|x - x_0\|_1 < r\}$ e $B^2(x_0, r) = \{x \in X : \ \|x - x_0\|_2 < r\}$.
Dimostrare che per ogni $r > 0$ esistono due costanti $r_1, r_2 > 0$ tali che, per ogni $x \in X$, si ha
$$B^1(x, r_1) \subset B^2(x, r) \subset B^1(x, r_2).$$
Dimostrare quindi che gli insiemi aperti rispetto alla (distanza indotta dalla) norma $\|\cdot\|_1$ e alla norma $\|\cdot\|_2$ coincidono.

2. Su $\mathbb{R}^N$ definiamo le seguenti norme: per ogni $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$
$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_k|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^N |x_k|^2}; \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}.$$
Dimostrare che queste norme sono a due a due topologicamente equivalenti.
Suggerimento: studiare prima l'equivalenze tra le norme 1 e 2 e quella ∞, e da queste dedurre quella tra le norme 1 e 2.

3. Sia V uno spazio vettoriale (reale o complesso) con il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dimostrare che la norma associata verifica l'identità del parallelogramma:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$
Dimostrare che la norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^2$ non provengono da un prodotto scalare.
Suggerimento: trovare dei vettori per cui non valga l'identità del parallelogramma.

4. Sia $l_2 = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} : \ \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < +\infty\}$. Dimostrare che l_2 è uno spazio vettoriale reale e
$$\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$$
è un prodotto scalare su l_2.

5. Dimostrare che per ogni $L \in (\mathbb{R}^N)^*$ esiste uno e un unico $y \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$L[x] = \langle x, y \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^N$.

Dimostrare infine che $\|L\| = \|y\|$ dove $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} |L[x]|$ e $\|y\|$ è l'usuale norma euclidea.

6. Sia $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una applicazione lineare. La sua norma è data da

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L[x]\|.$$

Dimostrare che l'estremo superiore viene raggiunto, cioè

$$\|L\| = \max_{\|x\|=1} \|L[x]\|.$$

7. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Calcolare $\|L\|$ quando L è data da

(a) $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(b) $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(c) $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Risolvere lo stesso esercizio sostituendo la norma euclidea con la norma $\| \cdot \|_\infty$ sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo.

Suggerimento: $\{\|x\| = 1\} = \partial B_1(0)$ che, per la distanza euclidea, coincide con la circonferenza unitaria e questa si può descrivere

$$\partial B_1(0) = \{(\cos\theta, \sin\theta), \ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

8. Sia $C([0,1], \mathbb{R})$ dotato dela seguente norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{per ogni } f \in C([0,1], \mathbb{R}).$$

Verificare che questa è una norma. Sia ora $g \in C([0,1], \mathbb{R})$ e sia $L : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la seguente applicazione:

$$L(f) = \int_0^1 fg, \quad \text{per ogni } f \in C([0,1], \mathbb{R}).$$

Dimostrare che L è una applicazione lineare limitata e calcolarne la norma.

Suggerimento: usare il fatto che la norma 2 discende da un prodotto scalare e usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

9. Sia $C([0,1],\mathbb{R})$ dotato della norma del sup

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \text{per ogni } f \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

Sia $L : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la seguente applicazione:

$$L(f) = f(1), \quad \text{per ogni } f \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

Dimostrare che L è una applicazione lineare limitata e calcolarne la norma.

10. Determinare in quali $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sono continue le seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|^3+|y|^3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

11. Per ognuna delle seguenti successioni $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0,1],\mathbb{R})$, stabilire se questa converge puntualmente ad una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. In caso affermativo determinare se la convergenza è uniforme.

(a) $f_n(x) = \sqrt{e^x - 1/n}$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

(b) $f_n(x) = \arctan(nx)$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

(c) $f_n(x) = \dfrac{(2x)^n+1}{2^n+n^2}$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

(d) $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{n(x+1)}{\sqrt{n}x+1}\right)$ per ogni $x \in [0,1]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$

12. **Opzionale** Siano V e W due spazi vettoriali normati e sia $L : V \to W$ una applicazione lineare. Dimostrare che L è continua se e solo se L è limitata, cioè esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|L[v]\|_W \leq C\|v\|_V, \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Suggerimento: osservare che una applicazione lineare è continua se e solo se lo è in 0. La parte difficile è dimostrare che un'applicazione continua è limitata: usare la definizione di continuità in 0 con $\varepsilon = 1$ e ...