Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 2

1. Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Stabilire se $f + g$ e fg sono differenziabili in x^0 e in caso affermativo calcolarne il differenziale.

2. Sia $g \in \mathbb{R}^N$. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \langle x, g \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Dimostrare che f è differenziabile su $\mathbb{R}^N$ e calcolare il differenziale.

   Suggerimento: $\langle x, g \rangle = \langle g, x \rangle = g^T \cdot x$ dove g e x sono vettori colonna di $\mathbb{R}^N$, g^T denota il trasposto di g e $\cdot$ denota il prodotto righe per colonne.

3. Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, A aperto, due funzioni a valori vettoriali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^M$. Dimostrare che $h : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^{M} f_i(x) g_i(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

   è differenziabile in x^0. Dimostrare infine che

$$\nabla h(x^0) = \sum_{i=1}^{M} \left(f_i(x^0) \nabla g_i(x^0) + g_i(x^0) \nabla f_i(x^0) \right).$$

4. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di una variabile reale. Sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$h(x, y) = f(x) g(y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Supponiamo che $f(0)$ e $g(0)$ siano diversi da zero. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su f e g affinché h sia differenziabile in $(0, 0)$, e calcolare in tal caso il differenziale.

5. Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni

   (a) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan^2(x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (b) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2 y} - 1}{(x^2 + y^2)^{1/4}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (c) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 - y^3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (d) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + xy)}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \in B_1((0, 0)),\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili sul loro dominio e in caso affermativo determinarne la matrice Jacobiana in ogni punto del dominio

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dove $f(x,y) = (x^2/y, 2\cos(x+y), \dfrac{\arctan(x^3)}{x-y})$
   (b) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ dove $f(x) = (x+1, 3\sin(x), e^{2x}, 1-x, \log(x+1)$
   (c) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x,y,z) = (z^2xy - z/y, \log(1+x+y^2))$
   (d) $f : A \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dove $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 - \sin(x_3^2x_4)$

7. Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili sul loro dominio e in caso affermativo calcolarne il gradiente e l'approssimante lineare in ogni punto del dominio

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = \cos(\arctan(x-y))$
   (b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = x^4 + 3y\log(1+x)$
   (c) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = xy - \dfrac{x+y}{x+4y}$
   (d) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y,z) = \dfrac{z(e^{x+y})}{x+y^2}$

8. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, passante per il punto P_0, dove f e P_0 sono dati da:

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = x^4 + 3y\log(1+x)$ e $P_0 = (0,1,0)$
   (b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = xy - \dfrac{x+y}{x+4y}$ e $P_0 = (1,2,5/3)$

9. Calcolare la matrice Jacobiana della funzione composta $g \circ f$ dove le funzioni g e f sono date da:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove

   $$f(x,y) = (2xy, x^2+y, \sin(y)) \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = (e^{x+y}, z^2x)$$

   Suggerimento: considerare

   $$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y), w(x,y)) = (2xy, x^2+y, \sin(y))$$

   e g data da $g(u,v,w) = (e^{u+v}, w^2u)$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove

   $$f(x,y) = (x+y, x-y, xy, 2) \quad \text{e}$$
   $$g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\cos(x_1^2x_3), x_4^5x_2, \sin(x_2x_3))$$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove

   $$f(t) = (t^3, t^2, t) \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = x^2 + y^4 + \cos(xyz)$$

   (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dove

   $$f(x,y,z) = x^2 + y^4 + \cos(xyz) \quad \text{e} \quad g(t) = (t^3, t^2, t)$$

10. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos^2(t)) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = xy + z^2.$$

Calcolare

$$\frac{d}{dt}(g \circ f)(t)$$

11. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dove $f(x, y) = (x^2y, xy, 2y^2)$ e

$$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z), g_4(x, y, z)) = (3x^2y, z^3 + \sin(xy), z^4, x^8 + y^9).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial y}(g_2 \circ f)(x, y)$$

12. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x, y, z) = (x^2, z^2y, y^2x)$ e

$$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (e^{xz}y, y^2).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial z}(g_1 \circ f)(x, y, z)$$

13. Sia dato un fluido contenuto in una regione Ω, Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che il vettore velocità $v = (v_1, v_2, v_3)$ con cui si muove il fluido dipenda dalla temperatura T e dalla densità σ tramite la legge $v = F(T, \sigma)$ dove $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$. Supponiamo che in un punto $x^0 \in \Omega$ la temperatura, $T(x_0)$, sia pari a 30 e la densità, $\sigma(x^0)$, sia pari a 10. Supponiamo che $v(30, 10) = (1, 0, -1)$ e che

$$\frac{\partial v}{\partial T}(30, 10) = \frac{\partial F}{\partial T}(30, 10) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial \sigma}(30, 10) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(30, 10) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla T(x^0) = [5\ 4\ 1] \quad \text{e} \quad \nabla \sigma(x^0) = [1\ 4\ -1].$$

Sia $\|v\|^2 : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione tale che $\|v\|^2(x) = \|v(x)\|^2$ per ogni $x \in \Omega$. Calcolare $\nabla(\|v\|^2)(x^0)$.

14. Sia dato un fluido contenuto in una regione Ω, Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che il vettore velocità $v = (v_1, v_2, v_3)$ con cui si muove il fluido dipenda dalla temperatura T, dalla densità σ e anche esplicitamente dalla posizione tramite la legge $v = F(T, \sigma, x, y, z)$ dove $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$. Supponiamo che in un punto $x^0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ la temperatura, $T(x_0)$, sia pari a 30 e la densità, $\sigma(x^0)$, sia pari a 10. Supponiamo che $v(30, 10, x^0) = (1, 0, -1)$ e che

$$\frac{\partial v}{\partial T}(30, 10, x^0) = \frac{\partial F}{\partial T}(30, 10, x^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(30,10,x^0) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(30,10,x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial y}\ \frac{\partial v}{\partial z}\right](30,10,x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla T(x^0) = [5\ 4\ 1] \quad \text{e} \quad \nabla \sigma(x^0) = [1\ 4\ -1].$$

Per ogni $t \in (-r,r)$, sia $f(t) = \|v\|^2(x^0 + tw) = \|v(x^0 + tw)\|^2$ dove $w = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $f'(0)$.

15. **Opzionale** Dimostrare il Teorema del Differenziale Totale nel caso in cui $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $N > 2$.

    Suggerimento: l'esercizio non è facile, procedere per induzione sul numero di variabili N, utilizzando il caso $N = 2$ come base d'induzione.