Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 3

1. Sia A una matrice $N \times N$ e $c \in \mathbb{R}^N$ un vettore colonna. Sia c^T il vettore trasposto di c. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

   dove $a_1, \dots, a_N$ sono le colonne di A e $b_1, \dots, b_N$ sono le righe di A.

   Calcolare $c^T \cdot A$ e $A \cdot c$, dove $\cdot$ denota il prodotto righe per colonne.

2. Sia $N \geq 2$ e sia $P_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, un polinomio omogeneo di grado 2 in N variabili dato da

$$P_2(x) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x^\alpha$$

   dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ è una N-upla di numeri interi non negativi (N-*multiindice*) e a_α è un numero reale, per ogni α. Dimostrare che esiste una matrice $N \times N$ simmetrica A tale che

$$P_2(x) = \langle Ax, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

   Calcolare gli elementi a_{ij} della matrice, $i, j = 1, \dots, N$, in termini dei coefficienti a_α. Determinare la matrice simmetrica A anche nel caso in cui P_2 sia descritto da $P_2(x) = \langle Bx, x \rangle$ dove B è una qualunque matrice $N \times N$.

3. Sia $N = 3$ e sia $P_3(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado 3 in N variabili dato da

$$P_3(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} b_{ijk} x_i x_j x_k$$

   dove b_{ijk} è un numero reale, per ogni $i, j, k = 1, \dots, N$. Scrivere P_3 nella forma

$$P_3(x) = \sum_{|\alpha|=3} b_\alpha x^\alpha,$$

   dove α è un 3-multiindice, esprimendo i coefficienti b_α in termini dei coefficienti b_{ijk}.

4. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dove A è un aperto connesso. Supponiamo che f sia differenziabile in ogni punto di A. Caratterizzare le funzioni f di questo tipo il cui differenziale sia costante, cioè tali che esista $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ per cui

$$Df(x) = L \quad \text{per ogni } x \in A.$$

5. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una funzione differenziabile in A. Siano x^0 e x^1 tali che $[x^0, x^1]$, il segmento di vertici x^0 e x^1, sia contenuto in A. Dimostrare che
$$\|f(x^1) - f(x^0)\| \leq \left(\sup_{x \in [x^0, x^1]} \|Df(x)\| \right) \|x^1 - x^0\|$$
dove $\|Df(x)\|$ è la norma del differenziale come operatore lineare.

   Suggerimento: trovare $y \in \mathbb{R}^M$ tale che
$$\langle f(x^1) - f(x^0), y \rangle = \|f(x^1) - f(x^0)\|$$
e studiare $g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dove $g(x) = \langle f(x), y \rangle$ per ogni $x \in A$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ differenziabile in R^N. Supponiamo che esista una costante $C > 0$ tale che
$$\|Df(x)\| \leq C \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$
dove $\|Df(x)\|$ è la norma del differenziale come operatore lineare. Dimostrare che se $C < 1$, allora esiste $x \in \mathbb{R}^N$ tale che $f(x) = x$. Il risultato continua a valere se $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto con $A \neq \mathbb{R}^N$ e $f : A \to A$?

7. Calcolare la matrice Hessiana della funzione f in ogni punto del suo dominio dove f è data da

   (a) $f(x, y) = e^x y + xy^2$

   (b) $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2) - \dfrac{1}{xy}$

   (c) $f(x, y, z) = xz^3 - \log(x + y^2 z^2)$

8. Sia data la funzione $f(x, y, z) = \cos(xy) - e^{2zx}$. Calcolare $D^\alpha f(1, 0, -1)$ per i seguenti 3-multiindici α
$$\alpha = (2, 1, 0); \quad \alpha = (1, 1, 2); \quad \alpha = (2, 0, 2).$$

9. Sia data la funzione $f(x, y) = 2-x+2y-xy+x^3+2x^2y-xy^2$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 0)$ e nel punto $(-1, 0)$ (nella rappresentazione canonica). Calcolare quindi
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(-1, 0).$$

10. Sia data la funzione $f(x, y, z) = 3-2y+xy+y^2+2x^2z-yz^2+z^3$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 0, 0)$ e nel punto $(1, 0, -1)$ (nella rappresentazione canonica). Calcolare quindi
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(1, 0, -1).$$

11. Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(x - y^2)$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f nel punto $(0, 1)$.

12. Sia data la funzione $f(x, y, z) = ze^{2x+yz}$. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f nel punto $(1, 0, 1)$.

13. Calcolare il polinomio di Taylor di grado k per la funzione f nel punto 0 dove

    (a) $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ e $k = 3$

    (b) $f(x, y) = ye^{xy+2x^3}$ e $k = 5$

    (c) $f(x, y, z) = xz \log(1 + y^2 z) + \cos(x^2 - y^2)$ e $k = 7$

14. **Opzionale** Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, A aperto. Siano A_1 e A_2 due insiemi aperti tali che $A_1 \subset A$ e $A_2 \subset A$ e che verificano

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad A_1 \cup A_2 = A.$$

Dimostrare che se A è connesso (per poligonali), allora uno dei due insiemi A_1 e A_2 è necessariamente vuoto.

Suggerimento: considerare la dimostrazione del fatto che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo e applicarla ai segmenti in $\mathbb{R}^N$.

15. **Opzionale** Sia $N = 4$. Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado k ($k \geq 0$) in N variabili.

Suggerimento: calcolare quanti sono gli N-multiindici α di peso k. Ragionare per induzione su N. Il caso $N = 1$ è banale. Risolvete il problema per $N = 2$ e ogni $k \geq 0$. Quanti sono i 3-multiindici di peso k? Sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, fissate $\alpha_3 = j$, j intero compreso tra 0 e k, e contate quanti sono i 3-multiindici di peso k per cui $\alpha_3 = j$. Sommate poi per j che varia da 0 a k. Risolto il caso $N = 3$ potete procedere analogamente per il caso $N = 4$.

16. **Opzionale** Sia α un N-multiindice di peso k, $k \geq 1$. Dimostrare che gli elementi del tipo $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, con $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, N$, che sono uguali a x^α sono in numero di

$$\frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!}.$$

Suggerimento: si consideri il caso $N = 2$. Si osservi che il binomio di Newton afferma che

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_1^j x_2^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x_1^j x_2^{k-j}.$$

Ma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ è tale che $|\alpha| = k$ se e solo se $\alpha = (j, k - j)$, $j = 0, \ldots, k$. Quindi il binomio di Newton si legge anche

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{|\alpha|=2} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \sum_{|\alpha|=2} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Il caso $N = 2$ è quindi dimostrato. Provare quindi a dimostrare la formula generale per induzione su N.