Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 4

1. Sia $A \in \mathcal{M}^{N\times N}(\mathbb{C})$ una matrice $N \times N$ a valori complessi. Dimostrare che per ogni v, $w \in \mathbb{C}^N$ si ha

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, \overline{A}^T w\rangle,$$

dove $\overline{A}^T$ è la matrice trasposta coniugata di A e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{C}^N$. Concludere che se A è invertibile e vale $A^{-1} = \overline{A}^T$, allora per ogni v, $w \in \mathbb{C}^N$ si ha

$$\langle Av, Aw\rangle = \langle \overline{A}^T v, \overline{A}^T w\rangle = \langle v, w\rangle.$$

2. Sia C un sottoinsieme chiuso e non vuoto di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che la funzione

$$F(x) = \mathrm{dist}(x, C) = \inf_{y\in C} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, è continua e che

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N : \; F(x) = 0\}.$$

3. Sia D un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, D diverso dall'insieme vuoto e da $\mathbb{R}^N$. Costruire una funzione continua $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che $F(x) > 0$ se e solo se $x \in D$, $F(x) = 0$ se e solo se $x \in \partial D$ e, quindi, $F(x) < 0$ se e solo $x \notin \overline{D}$.

   Suggerimento: usate, modificandola opportunamente, la funzione distanza costruita nell'esercizio precedente.

4. Per ognuna delle seguenti funzioni f, si determinino i loro punti stazionari e si stabilisca, se possibile, se questi sono minimi locali, massimo locali o punti di sella.

   (a) $f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$

   (b) $f(x, y) = e^{x^2 y - y^2 - y}$

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2yz + x^2 y$
   Suggerimento: per tutti i punti critici, $\lambda = 2$ è un autovalore della matrice Hessiana

5. Per ognuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, determinare, se esiste,

$$\min_{\mathbb{R}^N} f.$$

   (a) $f(x, y) = x^4 + 3x^2 + 2y^2 + xy - 4$

   (b) $f(x, y) = 2x^2 + |x^2 - 2x - 1| + y^2$

   (c) $f(x, y, z) = \log(1 + x^2 - x + y^2 + z^2)$

6. Determinare la retta tangente alla curva $(1+x)y\cos(y)+x^2+e^x=1$ nel punto $(0,0)$ passante per il punto $(0,0)$.

7. Determinare la retta tangente alla curva $x\arctan(x)y-(\pi/2)e^{y-1}=0$ nel punto $(1,1)$ passante per il punto $(1,1)$.

8. Determinare il piano tangente alla superficie $x^2+y^2-z^2=9$ nel punto $(0,5,4)$ passante per il punto $(0,5,4)$.

9. Determinare il piano tangente alla superficie $y^3-xe^{zy}+z^2y^2+e^x+z=5$ nel punto $(0,0,4)$ passante per il punto $(0,0,4)$.

10. Determinare il piano tangente all'insieme di livello 2 della seguente funzione $F(x,y,z)=x^3-xy^2+e^{zx}+\cos(y-1)$ nel punto $(0,1,3)$ passante per il punto $(0,1,3)$.

11. Per ognuna delle seguenti funzioni $f:C\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

(a) $f(x,y)=e^{xy}+xy$ e $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2\leq 1\}$

(b) $f(x,y)=y^2-\sqrt{6}x^2$ e $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,1],\ x^2-1\leq y\leq 1-x^4\}$

(c) $f(x,y,z)=2y^3-3y^2+x^2-z^2$ e $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 9\}$

12. Risolvere i seguenti problemi di minimo vincolato. Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

(a) $f(x,y)=|x|-|y|$ e $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2-2y=0\}$

(b) $f(x,y)=-x^2-x-y^2$ e $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y+2yx=1,\ x\in[-2,-1]\cup[0,1]\}$

(c) $f(x,y,z)=x-2y-2z^2$ e $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+2y^2+z^2=1\}$

(d) $f(x,y,z)=x+y^2-z^2$ e $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=1 \text{ e } y-2z=0\}$

13. Dimostrare il Teorema di inversione locale per $N=1$.

14. Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ una funzione continua. Una funzione di questo tipo è detta *curva* in $\mathbb{R}^3$. Sia $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Supponiamo che la funzione γ sia di classe C^1 in (a,b) e che in un punto $t_0\in(a,b)$ sia

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0)=\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\neq 0.$$

Allora definiamo *retta tangente alla curva* γ nel punto $\gamma(t_0)$, passante per il punto stesso, la retta r di equazione parametrica

$$r=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y,z)=\gamma(t_0)+s\gamma'(t_0),\ s\in\mathbb{R}\}.$$

Il vettore $\gamma'(t_0)$ si dice *vettore tangente* alla curva γ nel punto $\gamma(t_0)$. Se γ definisce il moto di un punto materiale al variare del tempo t, allora $\gamma'(t_0)$ è il vettore velocità al tempo t_0, mentre $\|\gamma'(t_0)\|$ è la velocità (scalare) al tempo t_0.

Siccome $\gamma'(t_0) \neq 0$, possiamo supporre ad esempio che sia $x'(t_0) \neq 0$. Dimostrare che esiste un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}$ di t_0, un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}$ di $x(t_0)$, e una funzione $f = (f_1, f_2) : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 tali che

$$\{\gamma(t) : \ t \in U\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in V \text{ e } (y, z) = f(x)\}.$$

Il grafico dell'approssimante lineare della funzione f nel punto $x(t_0)$ è una retta r_1, detta *retta tangente al grafico della funzione* f nel punto $(x(t_0), f(x(t_0))) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = \gamma(t_0)$, passante per il punto stesso. L'equazione parametrica della retta r_1 è

$$\begin{aligned} &r_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \\ &(y, z) = (f_1(x_0), f_2(x_0)) + (f_1'(x_0)(x - x_0), f_2'(x_0)(x - x_0)), \ x \in \mathbb{R}\} = \\ &\qquad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y, z) = \gamma(t_0) + s(1, f_1'(x_0), f_2'(x_0)) \ s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dimostrare che le due rette r e r_1 coincidono, cioè che i due vettori $\gamma'(t_0)$ e $(1, f_1'(x_0), f_2'(x_0))$ sono proporzionali.

Suggerimento: per semplicità si può prima considerare il caso due dimensionale, ponendo $z(t) \equiv 0$. In questo caso γ è una curva nel piano xy.

15. Sia $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in ogni punto di A, A aperto. Sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e sia $C = \{x \in A : \ F(x) = 0\}$. Supponiamo che $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ e che il punto $P_0 = (2, 1, 3)$ appartenga ad A e quindi anche a C. Sapendo che $f(P_0) = \min_C f$ e che $\frac{\partial f}{\partial z} = 2$, calcolare $\nabla f(P_0)$.

16. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 per cui valga $F(0) = 0$ e

$$JF(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo che un punto materiale percorra la curva di livello $\{F = 0\}$ con velocità scalare costante pari a $2m/s$ e che al tempo $t = 0$ si trovi nell'origine $0 \in \mathbb{R}^3$. Sappiamo inoltre che esiste un $\delta > 0$ per cui per ogni t, $0 < t < \delta$, la coordinata x della posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t è positiva. Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - zy$. Sia $s(t)$ il valore della funzione f nella posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t. Calcolare $s'(0)$.

17. **Opzionale** Sia $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. La funzione f si dice *semicontinua inferiormente* se per ogni $x_0 \in C$ e per ogni successione $\{x_n\}_n \subset C$ tale che $\lim_n x_n = x_0$ si ha

$$f(x_0) \leq \lim_n f(x_n).$$

Sia f semicontinua inferiormente. Dimostrare che

(a) se C è compatto, allora f ammette minimo su C;

(b) se C è chiuso, ma non limitato, e f è coerciva, allora f ammette minimo su C.

18. **Opzionale** Dimostrare il Teorema delle funzioni implicite nella sua versione generale come corollario del Teorema di inversione locale.

    Suggerimento: applicate il Teorema di inversione locale alla funzione $\tilde{F} : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^{N+M}$ così definita

    $$\tilde{F}(x, y) = (x, F(x, y)) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

19. **Opzionale** Dimostrare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso in cui $1 < M < N$.

    Suggerimento: ricordare che $\nabla f(P_0) \cdot J\tilde{g}(x_1^0, \dots, x_{N-M}^0) = 0$. Dimostrare che le $(N - M)$ colonne di $J\tilde{g}(x_1^0, \dots, x_{N-M}^0)$, $v_1, \dots, v_{N-M}$, sono vettori di $\mathbb{R}^N$ linearmente indipendenti. Ricordare che per ipotesi le righe di $JF(P_0)$, $\nabla F_1(P_0), \dots, \nabla F_M(P_0)$, sono anch'esse vettori di $\mathbb{R}^N$ linearmente indipendenti. Definire infine il sottospazio

    $$W = \{w \in \mathbb{R}^N : \langle w, v_i \rangle = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, N - M\} = \{w \in \mathbb{R}^N : w \cdot J\tilde{g}(x_1^0, \dots, x_{N-M}^0) = 0\},$$

    verificare che $\nabla F_i(P_0) \in W$ per ogni $i = 1, \dots, M$, e concludere.