Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 5

1. Siano E_1 e E_2 due sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che vale
$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

2. Per ogni $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ definiamo
$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1).$$
Dimostrare che se E_1 e E_2 sono misurabili, allora $E_1 \Delta E_2$ è misurabile.

   Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ di misura finita cioè tale che $m(E) < +\infty$. Per ogni $E_1, E_2 \subset E$, misurabili, diciamo che $E_1 \sim E_2$ se e solo se $m(E_1 \Delta E_2) = 0$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\{E_1 \subset E : \ E_1 \text{ misurabile}\}$.

   Sia $X = \{[E_1]_\sim : \ E_1 \subset E, \ E_1 \text{ misurabile}\}$. Per ogni $E_1, E_2 \subset E$, misurabili, definiamo
$$d([E_1]_\sim, [E_2]_\sim) = m(E_1 \Delta E_2).$$
Dimostrare che d è una distanza su X.

3. Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile di misura positiva. Dimostrare che per ogni t, $0 < t < m(E)$, esiste E_t, sottoinsieme misurabile di E, tale che $m(E_t) = t$.

   Suggerimento: per ogni $t > 0$ sia $F_t = E \cap (-t, t)$. Sia $f(t) = m(F_t)$. Dimostrare che f è una funzione continua.

4. Dimostrare che per ogni $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile di misura finita esiste una successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ di insiemi aperti tali che $E \subset A_{n+1} \subset A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m(E) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$. Concludere che esiste un insieme Boreliano F tale che $E \subset F$ e $m(F \backslash E) = 0$.

   Dimostrare infine che quest'ultima proprietà è vera per ogni E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$, anche se E non ha misura finita.

5. Sia $K \subset A \subset \mathbb{R}^N$, K compatto, A aperto. Dimostrare che $m(K) < m(A)$.

6. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $E = \mathbb{R}^{N-1} \times \{a\} \subset \mathbb{R}^N$. Dimostrare che E ha misura (N-dimensionale) nulla.

7. Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile, tale che $m(E) = 0$. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste $c \in \mathbb{R} \backslash E$ tale che $a < c < b$. Concludere quindi che $\overline{\mathbb{R} \backslash E} = \mathbb{R}$.

8. Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile. Sia $f : E \to [-\infty, +\infty]$ crescente, cioè, per ogni $x, y \in E$, se $x \leq y$ allora $f(x) \leq f(y)$.

   Dimostrare che f è misurabile.

9. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Siano $f, g : E \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$. Dimostrare che se $f = g$ quasi ovunque su E allora f è misurabile se e solo se g è misurabile.

   Siano $f, g : E \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ misurabili. Diremo che $f \sim g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque su E.

   Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\{f : E \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty] : \ f \text{ misurabile}\}$.

10. Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f|$ sia misurabile mentre f non lo è.

11. Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$, E misurabile, f misurabile.

    Dimostrare che $f = 0$ quasi ovunque su E se e solo se $\int_E |f| = 0$.

12. Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia

$$V = \{f : [a, b] \to [-\infty, +\infty] : \ f \text{ è misurabile su } [a, b]\}.$$

    Per ogni $f, g \in V$ diremo che $f \sim g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque su $[a, b]$.

    Sia $V_1 = \{f : [a, b] \to [-\infty, +\infty] : \ f \text{ è integrabile su } [a, b]\}$. Dimostrare che V_1 è uno spazio vettoriale e $C([a, b], \mathbb{R}) \subset V_1 \subset V$.

    Sia $L^1([a, b]) = V_1/ \sim = \{[f]_\sim : \ f \in V_1\}$. Per ogni $f \in V_1$ definiamo

$$\|[f]_\sim\|_1 = \|f\|_1 = \int_a^b |f|.$$

    Dimostrare che $L^1([a, b])$ è uno spazio vettoriale e che $\|[f]_\sim\|_1$ per ogni $[f]_\sim \in L^1([a, b])$ è una norma su $L^1([a, b])$.

13. Usando le notazioni dell'esercizio precedente, sia

$$V_2 = \left\{ f : [a, b] \to [-\infty, +\infty] : \ \int_a^b |f|^2 < +\infty \right\}.$$

    Dimostrare che V_2 è uno spazio vettoriale e $C([a, b], \mathbb{R}) \subset V_2 \subset V$.

    Sia $L^2([a, b]) = V_2/ \sim = \{[f]_\sim : \ f \in V_2\}$. Per ogni $f, g \in V_2$ definiamo

$$\langle [f]_\sim, [g]_\sim \rangle = \int_a^b fg.$$

    e

$$\|[f]_\sim\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{1/2}.$$

    Dimostrare che $L^2([a, b])$ è uno spazio vettoriale e che $\langle [f]_\sim, [g]_\sim \rangle = \int_a^b fg$, per ogni $[f]_\sim, [g]_\sim \in L^2([a, b])$, è un prodotto scalare su $L^2([a, b])$ la cui norma associata è

$$\|[f]_\sim\|_2,$$

    per ogni $[f]_\sim \in L^2([a, b])$.

14. **Opzionale** Dimostrare che la σ-algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}^N$ coincide con la σ-algebra dei Boreliani, $\mathcal{B}$.

    Suggerimento: dimostrare innanzitutto che ogni insieme aperto è unione numerabile di intervalli (non necessariamente disgiunti!).

15. **Opzionale** Sia $\mathcal{M}_1$ una σ-algebra contenente gli intervalli di $\mathbb{R}^N$. Sia $m_1 : \mathcal{M}_1 \to [0, +\infty]$ una applicazione tale che

    (a) m_1 è numerabilmente additiva

    (b) $m_1(I) = l(I)$ per ogni $I \subset \mathbb{R}^N$ intervallo

    (c) m_1 è invariante per traslazioni

    Usando l'esercizio precedente dimostrare che $\mathcal{B} \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1$.

    Dimostrare che per ogni $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1$ si ha

    $$m(E) = m_1(E).$$

    In particolare $m(E) = m_1(E)$ vale almeno per ogni $E \in \mathcal{B}$.

    Suggerimento: dimostrare che m coincide con m_1 sui compatti e sugli aperti. Sia $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1$, di misura esterna finita. Allora dimostrare che $m(E) = \underline{m}(E) = m_1(E)$. Sia $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1$, di misura esterna non finita. Sia $E_n = E \cap B_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1$, di misura esterna finita. Quindi $m(E_n) = m_1(E_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ concludere che $m(E) = m_1(E)$.

16. **Opzionale** Sia $A \subset \mathbb{R}$ aperto non vuoto. Dimostrare che A è unione numerabile di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti.

    Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$, E misurabile, f quasi ovunque finita. Dimostrare che f è misurabile se e solo se $f^{-1}(A) = \{x \in E : \ f(x) \in A\}$ è misurabile per ogni $A \subset \mathbb{R}$, A aperto.

17. **Opzionale** Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, E misurabile, tale che f sia limitata e nulla fuori da un insieme di misura finita.

    Dimostrare che se f è misurabile allora l'integrale superiore e quello inferiore di f su E coincidono.

    Suggerimento: sia $|f| \leq M$ ovunque su E; fissato $n \in \mathbb{N}$ costruire una partizione dell'intervallo $[-M-1, M+1]$, $\{-M-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m_n} = M+1\}$ tale che per ogni $j = 1, \ldots, m_n$ si ha $x_j - x_{j-1} \leq 1/n$. Per ogni $j = 1, \ldots, m_n$ sia $E_j = \{x \in E : \ x_{j-1} \leq f(x) < x_j\}$. Utilizzare gli insiemi E_j, $j = 1, \ldots, m_n$, per costruire opportune funzioni semplici maggioranti e minoranti f.