Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 6

1. Calcolare

   (a) $\displaystyle\iint_Q xy\log(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q=[1,2]\times[2,3]$

   (b) $\displaystyle\iint_Q \frac{xy}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q=[1,2]\times[2,3]$

   (c) $\displaystyle\iint_Q (x+y)\log(1+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q=[0,1]\times[0,1]$

   (d) $\displaystyle\iint_Q x\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q=[1,2]\times[0,1/2]$

   (e) $\displaystyle\iint_Q (x+y)e^{2xy+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q=[1,2]\times[0,1]$

   (f) $\displaystyle\iint_Q \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$

   (g) $\displaystyle\iiint_Q \frac{1+2xy}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dove $Q=[-1,1]\times[0,1]\times[2,3]$

2. Sia E il quarto di disco di raggio 1 contenuto nel primo quadrante. Calcolare il centroide di E e

$$\iint_E y\arcsin(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. Sia $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$. Sia $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$. Stabilire se f è continua su E, è misurabile su E, è integrabile su E e in quest'ultimo caso calcolare

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{1+2y} & \text{se } (x,y)\in[-1,1]\times[0,2],\ 0\leq y\leq 1-x^2\\ 1 & \text{se } (x,y)\in[-1,1]\times[0,2],\ y>1-x^2\end{cases}$$

   Stabilire se f è integrabile su $[-1,1]\times[0,2]$ e in tal caso calcolare

$$\iint_{[-1,1]\times[0,2]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

5. Sia $E\subset\mathbb{R}^3$ misurabile e limitato, di misura non nulla. Sia $\mu: E\to\mathbb{R}$, $\mu\geq 0$ su E, misurabile e tale che $\int_E \mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z>0$. Scrivere le formule per calcolare il baricentro di E, (x_b,y_b,z_b), e il momento d'inerzia di E rispetto all'asse x, I_x, all'asse y, I_y, all'asse z, I_z, e all'origine, I_0.

6. Calcolare il volume del tronco di cono retto la cui base ha raggio 3 cm e la cui altezza misura 10 cm.

7. Calcolare il volume della piramide retta la cui base è un rettangolo di lati 3 e 5 cm e la cui altezza è 10 cm.

8. Sia $E = B_3(0)\backslash\overline{B_2(0)} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_E e^x y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

9. Sia $A = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le z \le 1, \ z^4 \le y \le 2 + e^z\}$. Sia V il solido ottenuto ruotando in senso orario A attorno all'asse z di un angolo $\pi/4$. Calcolare il volume di A. Sia invece V_1 il solido ottenuto ruotando in senso orario A attorno all'asse y di un angolo 2π. Calcolare il volume di V_1.

10. Sia $y = \varphi(z) = |z|e^{|z|}$, $-1 \le z \le 1$. Sia $A = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le z \le 1, \ 0 \le y \le \varphi(z)\}$. A meno che non sia diversamente indicato, in questo esercizio e in quelli successivi supponiamo sempre che le regioni piane o i solidi considerati siano occupati da un corpo omogeneo con densità di massa costantemente uguale a 1. Calcolare il baricentro di A, il momento d'inerzia di A rispetto all'asse z, all'asse y e all'origine. Determinare infine il volume del solido ottenuto ruotando A attorno all'asse z di un angolo $\pi/3$ e di quello ottenuto ruotando A attorno all'asse y di un angolo π.

11. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$. Calcolare il baricentro di A e il momento d'inerzia di A rispetto all'asse x. Sia V il solido ottenuto ruotando A di π attorno all'asse x. Calcolare il baricentro di V e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x.

12. Sia C la corona circolare aperta in $\mathbb{R}^3$, centrata nell'origine, di raggio interno 2 e raggio esterno 3, cioè $C = B_3(0)\backslash\overline{B_2(0)} \subset \mathbb{R}^3$. Calcolare

$$\iiint_C y^2 xz \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

13. Sia V la palla unitaria in $\mathbb{R}^3$ intersecata con il cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0, (x^2 + y^2) \le z^2\}$. Calcolare il volume di V e il suo baricentro. Inoltre calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\iiint_V x^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

14. Sia V la palla unitaria in $\mathbb{R}^3$ intersecata con il cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0, (x^2 + y^2) \le 3z^2\}$. Calcolare il volume di V, il suo baricentro e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x, y e z. Inoltre calcolare

$$\iiint_V \log(z) z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{e} \quad \iiint_V (x^2 e^z + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

15. Sia V la calotta sferica

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \|(x, y, z)\| \le 2, \ z \ge 1\}.$$

Scrivere V in coordinate cartesiane, come dominio normale rispetto all'asse z, in coordinare cilindriche e in coordinate sferiche. Calcolarne quindi il volume, il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse z. Calcolare infine

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{e} \quad \iiint_V \log(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

16. Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Suggerimento: Dimostrare che

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dimostrare che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint_{B_n(0)} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Calcolare infine quest'ultimo limite.

17. Sia $\varphi : A \to B$ una applicazione di classe C^1, A, B aperti di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che se φ è una biiezione tra A e B e vale

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| > 0 \quad \text{per ogni } x \in A,$$

allora φ è un C^1-diffeormorfismo tra A e B.

18. Sia T una matrice reale 2×2, invertibile. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(x,y) = T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che φ è un C^1-diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$. Sia $Q = [0,1]\times[0,1]$. Dimostrare che $m_2(\varphi(Q)) = |\mathrm{det}T|$.

Opzionale Dimostrare quindi che per ogni $E \subset \mathbb{R}^2$, E misurabile, si ha che $\varphi(E)$ è misurabile e $m_2(\varphi(E)) = |\mathrm{det}T|m_2(E)$.

19. **Opzionale** Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo qualunque. Dimostrare che $E \times I \subset \mathbb{R}^{N+1}$ è misurabile e vale

$$m_{N+1}(E\times I) = m_N(E)\cdot m_1(I)$$

con la convenzione che $\infty \cdot 0 = 0$.

Suggerimento: dimostrare prima il caso in cui E e I siano di misura finita e siano o entrambi compatti o entrambi aperti.

20. **Opzionale** Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e sia $f : E \to [-\infty,+\infty]$ misurabile. Supponiamo che $f \geq 0$ su E. Dimostrare che

$$\int_E f = \lim_n \int_{E\cap B_n(0)} \min\{f, n\}.$$

Dimostrare che se f è integrabile su E allora

$$\int_E f = \lim_n \int_{E\cap B_n(0)} \max\{\min\{f,n\},-n\}.$$

Dimostrare inoltre che se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una qualunque successione di insiemi misurabili tali che $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m(\mathbb{R}^N \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = 0$ allora in entrambi i casi ($f \geq 0$ su E o f integrabile su E) possiamo sostituire nelle precedenti formule $B_n(0)$ con A_n e si ha inoltre

$$\int_E f = \lim_n \int_{E\cap A_n} f.$$