Esercizi Analisi Matematica II

Foglio 7

1. Siano X e Y due spazi metrici. Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ Lipschitziana è continua.

2. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di I. Dimostrare allora che f è Lipschitziana su I se e solo se $f' : I \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

3. Sia $C \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, C aperto convesso. Sia $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $M \geq 1$, differenziabile in C. Dimostrare che f è Lipschitziana se e solo se $\|Df\| : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è limitata. Ricordiamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^N$ è *convesso* se per ogni $x, y \in C$ il segmento di estremi x e y, $[x, y]$, è contenuto in C.

4. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $N, M \geq 1$, Lipschitziana. Dimostrare che esistono costanti A_1 e A_2, $A_1, A_2 \geq 0$, tali che
$$\|f(x)\| \leq A_1 + A_2\|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

5. Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, Ω aperto. Sia $(t_0, x^0) \in \Omega$ e sia $\delta > 0$. Supponiamo che $x_1 : [t_0 - \delta, t_0] \to \mathbb{R}^n$ e $x_2 : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ siano due soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria
$$x' = f(t, x)$$
tali che $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x^0$. Sia $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ così definita
$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{se } t_0 - \delta \leq t \leq t_0 \\ x_2(t) & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta \end{cases}$$
Dimostrare che x è una soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

6. Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, Ω aperto. Supponiamo che f sia localmente Lipschitziana nella seconda variabile. Sia $(t_0, x^0) \in \Omega$ e sia $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, $-\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq +\infty$, la soluzione massimale del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$
Supponiamo che $\beta \in \mathbb{R}$ e che esista il limite $\lim_{t \to \beta^-} x(t) = \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste $\lim_{t \to \beta^-} (t, x(t)) = (\bar{t}, \overline{x}) = (\beta, \overline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dimostrare che il punto $(\bar{t}, \overline{x})$ appartiene a $\partial\Omega$.

7. Dimostrare il seguente *Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali.* Sia $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Supponiamo che esista una costante A tale che per ogni $t \in I$ e per ogni x^1, $x^2 \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|f(t, x^1) - f(t, x^2)\| \leq A\|x^1 - x^2\|.$$

Siano $t_0 \in I$ e x^0, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Siano x e y le soluzioni massimali, rispettivamente, dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'intervallo massimale di definizione di x e y è l'intervallo I. Dimostrare infine che per ogni $t \in I$ si ha

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x^0 - y^0\| e^{A|t-t_0|}.$$

Suggerimento: applicare il Lemma di Gronwall.

8. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni scalari del primo ordine e risolvere il corrispondente problema di Cauchy (in particolare stabilire se vi è unicità della soluzione e determinarne l'intervallo massimale di definizione)

   (a) $(1 + t^2)y' - ty = \sqrt{1 + t^2}$, $y(0) = 1$
   (b) $y - \sin(t)y' - \sin(t)(1 - \cos(t))y^2 = 0$, $0 < t < \pi$, $y(\pi/2) = 1/2$
   (c) $y^4 y' = t^3 - t$, $y \neq 0$, $y(0) = -1$
   (d) $xy' = y(\log(y) - \log(x))$, $x > 0$, $y > 0$, $y(1) = 1$
   (e) $y' - e^t y = e^t$, $y(1) = 0$
   (f) $y' + (\tan t)y = \sin t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, $y(0) = 0$
   (g) $\dfrac{xy'}{y^3} = 1 - x^4$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y(1) = 1$
   (h) $y' - \dfrac{y}{t} + \sqrt{y}t^2 = 0$, $t \neq 0$, $y \geq 0$, $y(1) = 1$
   (i) $(t^2 - yt^2)y' + y^2 + ty^2 = 1 + t$, $t \neq 0$, $y \neq 1$, $y(0) = -1$
   (j) $t\dfrac{y'}{1 + y^2} = 2$, $t \neq 0$, $y(2) = 0$
   (k) $y' = \dfrac{y^2 - ty}{t^2}$, $t \neq 0$, $y(1) = 0$
   (l) $y' - 2\dfrac{y}{t} = \dfrac{t^2}{t - 2}$, $0 < t < 2$, $y(1) = 2$
   (m) $(1 - t^2)y' - ty - 2ty^{-2} = 0$, $t \neq \pm 1$, $y \neq 0$, $y(2) = -1$
   (n) $\sin(y)y' = t$, $0 < y < \pi$, $y(0) = \pi/2$
   (o) $y' + \sin(x)y - \sin(x)\sqrt[3]{y} = 0$, $y(0) = 0$
   (p) $y' = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, $x \neq 0$, $y(1) = 2$

9. Siano $K > 0$ e $\gamma \geq 0$ due costanti. Consideriamo l'equazione dell'oscillatore armonico con attrito
$$x'' = -Kx - \gamma x'.$$
Trovare l'integrale generale dell'equazione e la soluzione del problema di Cauchy con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ al variare dei parametri reali $K > 0$, $\gamma \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$. Infine dare una interpretazione fisica del risultato.

10. Trovare l'integrale generale dei seguenti sistemi di equazioni lineari del primo ordine e risolvere il corrispondente problema di Cauchy

    (a)
    $$\begin{cases} x' = x - 4y + te^t \\ y' = x + y - t^2 e^t \end{cases}$$
    Condizioni iniziali: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

    (b)
    $$\begin{cases} x' = 2x + \sqrt{2}y + t^3 \\ y' = -\sqrt{2}x - y - 2t \end{cases}$$
    Condizioni iniziali: $x(1) = 1$, $y(1) = 0$

    (c)
    $$\begin{cases} x' = 2x + 3y + t^2 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$$
    Condizioni iniziali: $x(0) = 2$, $y(0) = 1$

    (d) $x' = Ax$ dove
    $$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
    Condizioni iniziali: $x(0) = (1, 2, 0)$

    (e) $x' = Ax$ dove
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
    Condizioni iniziali: $x(0) = (-1, -1, -1)$

11. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni scalari lineari e risolvere il corrispondente problema di Cauchy

    (a) $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^t + 1}$
    Condizioni iniziali: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

    (b) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2t}\cos(t) + t$
    Condizioni iniziali: $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

    (c) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{e^t(t+1)}$, $t \neq -1$
    Condizioni iniziali: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \cos(t)$
Condizioni iniziali: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

(e) $y''' - 2y'' + y' = \dfrac{te^t}{1+2t}$, $t \neq -1/2$
Condizioni iniziali: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$

(f) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^t \sin(t)$
Condizioni iniziali: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

(g) $y^{(5)} + y = t$
Condizioni iniziali: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 0$

12. **Opzionale** Sia $p(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \dots a_{n-1} u + a_n$, con $n \geq 2$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Sia $\tilde{p}$ il polinomio caratteristico della matrice compagna del polinomio p. Dimostrare che $\tilde{p} = (-1)^n p$.

Suggerimento: procedere per induzione.