Corso di Topografia e Cartografia

Elementi di Geodesia

Prof.ing. Raffaela Cefalo
DIA – Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste

Unità di misura degli angoli

Gradi sessagesimali:

1° è definito come la novantesima parte di un angolo retto

Notazione: ### ° ## ' ##.#### "

Angolo giro = 360°

Angolo piatto = 180°

Angolo retto = 90°

1° = 60 '

1 ' = 60 "

Gradi centesimali:

1gon è definito come la centesima parte di un angolo retto

Notazione: ### g ### c ###.### cc

##,###### g

Angolo giro = 400 gon

Angolo piatto = 200 gon

Angolo retto = 100 gon

1 gon = 100 c

1c = 100 cc

Radianti

1 rad è definito come l'angolo al centro di una circonferenza di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza eguale al suo raggio

π = 3.14159265358979323846264338327950 = 4·tan-1(1)

Angolo giro = 2π

Angolo piatto = π

Angolo retto = $\pi/2$

!!!!! Se in una formula un angolo compare al di fuori di una funzione trigonometrica esso deve essere espresso sempre in radianti !!!!!

(es. : $\beta * \cos(\alpha) \rightarrow \alpha$ può essere espresso in una qualsiasi unità di misura purchè corrisponda alle impostazioni della calcolatrice, mentre β deve essere espresso in radianti.

Gradi millesimali:
Angolo giro = 6400°° (millesimi)

Trasformazioni fra unità di misura degli angoli:
(utilizzo delle proporzioni)

° = ## g · 9/10 (#° : 360° = #g : 400g)

° = ## rad · 180/π (#° : 360° = #rad : 2π)

g = ## rad · 200/π (#g : 400g = # rad : 2π)

In una calcolatrice:

DEG → Angoli sessagesimali

GRA → Angoli centesimali

RAD → Angoli in radianti

Sviluppi in serie

In molti problemi teorici e pratici di rilievo geodetico topografico ci si avvale dei metodi del calcolo di approssimazione

⇩

Rappresentazione approssimata ma più semplice delle grandezze

La sostituzione di una formula chiusa con il suo sviluppo in serie arrestato al termine n-mo sarà lecita se è accettabile l'ordine di approssimazione conseguibile *(se i termini trascurati, di ordine superiore ad uno dato, permettono la precisione richiesta).*

Sviluppo in serie di TAYLOR

Sia f(x) definita in un certo intervallo insieme alle sue derivate di ogni ordine; se x_0 è un punto interno all'intervallo di definizione:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 + \ldots + R_n$$

Sviluppi in serie

Sviluppo in serie di MAC-LAURIN

Quando il punto x_0 , nell'intorno del quale si effettua lo sviluppo, coincide con l'origine:

$$f(x) = f(x_0) + x \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 + \ldots + R_n$$

Sviluppo in serie BINOMIALE

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm \frac{m \cdot x}{1!} + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

Se m è intero positivo :

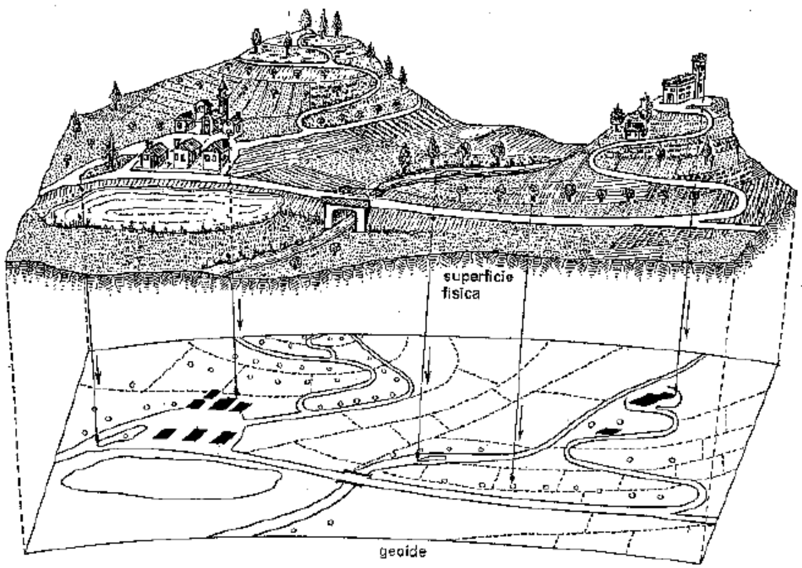
$$(1 \pm x)^m = 1 \pm \binom{m}{1} \cdot x + \binom{m}{2} \cdot x^2 \pm \binom{m}{3} \cdot x^3 + \ldots$$

ricordando che : $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$

Rappresentazione del terreno

La superficie fisica ha forma molto irregolare e discontinua

NON DEFINIBILE ANALITICAMENTE
(impossibili misure di aree, distanze e angoli)



Soluzione:

Proiettare tutti i punti del terreno, lungo la verticale, su una superficie di riferimento, che sia regolare, continua e levigata

GEOIDE

Rappresentazione del terreno

GEOIDE

⇩

Superficie normale in ogni punto alla direzione della verticale

=

Superficie dei mari, prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua avesse la stessa temperatura, la stessa densità e non ci fossero perturbazioni dovute a correnti, venti e maree

(superficie materializzata in corrispondenza di un mareografo – s.l.m.m.)

Ogni punto proiettato è univocamente determinato da:

- Coppia di COORDINATE CURVILINEE

- Distanza fra punto reale e sua proiezione → QUOTA
  (*quota ortometrica o geoidica*)

Compiti della Geodesia:

- Definizione del geoide nella sua forma e nelle sue dimensioni

- Definizione del campo gravitazionale terrestre in ogni punto (intensità e direzione del vettore di gravità $\vec{g}$)

- Ipotesi e conclusioni generali relative alla distribuzione interna delle masse nel globo terrestre

Geodesia geometrica → assume il fatto che il geoide possa essere semplificato con una superficie algebrica precisa (sfera, ellissoide di rotazione), studia la geometria delle superfici e insegna a sviluppare le triangolazioni e calcolare le relazioni di posizione fra i suoi punti

Geodesia dinamica → definisce il geoide come una superficie equipotenziale del campo gravitazionale, ne studia lo scostamento dalle superfici geometriche ed insegna a tenere conto delle conseguenze operative

Definizione della superficie di riferimento

Il geoide è la supeficie normale in ogni punto alla direzione della verticale

La gravità costituisce un campo di forza conservativo → ammette potenziale

Linee di forza → linee tangenti in ogni punto alla direzione della gravità
→ curve gobbe (non appartenenti ad un piano)

Superfici equipotenziali → infinite e normali alle linee di forza del campo

⇩

Il geoide è una superficie equipotenziale della gravità, che passa per un determinato punto cui viene attribuita quota nulla. Questo punto è definito in modo assoluto da un mareografo.

Definizione della superficie di riferimento

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane OXYZ, avente origine nel baricentro della terra, l'asse Z coincidente con quello di rotazione terrestre e gli assi X e Y giacenti sul piano equatoriale (ECEF – Earth Centred Earth Fixed)

Il vettore di gravità $\vec{g}$ è funzione della posizione ed è composto da due forze:

$$\vec{g} = \vec{g}\,(X, Y, Z)$$

-La forza di attrazione newtoniana $\vec{F}$

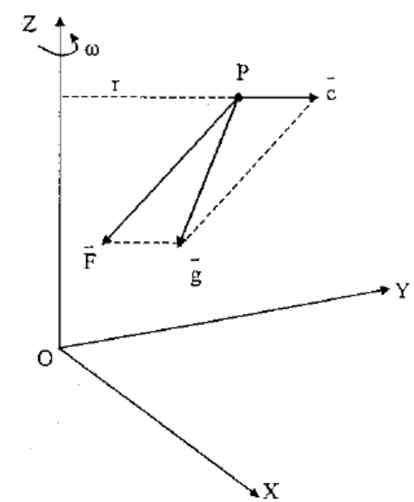
- La forza centrifuga $\vec{c} = \omega^2 \cdot \vec{r}$

$$\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\, rad/s$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Anche il potenziale è funzione della posizione

$$W = W\,(X, Y, Z)$$



Definizione della superficie di riferimento

Come noto: $\vec{g} = \text{grad } W$ $\quad \dfrac{\partial W}{\partial X} = \vec{g}_X \quad \dfrac{\partial W}{\partial Y} = \vec{g}_Y \quad \dfrac{\partial W}{\partial Z} = \vec{g}_Z$

Se indichiamo con dP uno spostamento infinitesimo del punto P, vale la relazione: $dW = \vec{g}_P \cdot d\vec{P}$

Ossia, la derivata del potenziale secondo una direzione dP fornisce la componente del vettore gravità in quella direzione

Se lo spostamento dP è tangente alla superficie equipotenziale passante per P, risulta: $dW = \vec{g}_P \cdot d\vec{P} = 0$

Da cui si deduce l'ortogonalità di $\vec{g}$ rispetto alla superficie equipotenziale

Sia W che le sue derivate prime sono funzioni continue e prive di singolarità, per cui le superfici equipotenziali sono lisce e prive di spigoli o punti singolari → In ogni punto esiste una sola normale superficiale univocamente definita e variabile con continuità
Ciò nonostante la superficie presenta continue gibbosità

Definizione della superficie di riferimento

Il potenziale W è una quantità scalare ed è pari alla somma dei potenziali della forza di attrazione universale $\vec{F}$ e della forza centifuga $\vec{c}$

Potenziale FORZA CENTRIFUGA

Per ricavare il potenziale della forza centrifuga ricordiamo che la derivata del potenziale secondo una direzione fornisce la componente della forza in quella direzione

$$\frac{dv}{dr} = \vec{c} = \omega^2 \cdot \vec{r}$$

Il potenziale sarà dunque:

$$\boxed{v(X, Y) = \int \omega^2 \cdot r dr = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot (X^2 + Y^2)}$$

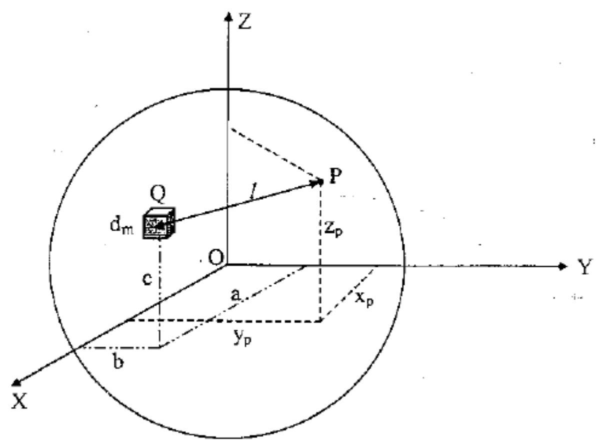
Definizione della superficie di riferimento

Potenziale FORZA GRAVITAZIONALE

La sua determinazione è più complessa. Consideriamo un elemento infinitesimo di massa dm posto in un punto Q(a,b,c) di densità δ(a,b,c)

$$dm = \delta(a,b,c) \cdot da \cdot db \cdot dc$$

Questo elemento infinitesimo provoca sulla massa unitaria posta in P(X,Y,Z) una forza di attrazione, il cui modulo vale:



$$dF = G \cdot \frac{dm \cdot 1}{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2} = G \cdot \frac{dm}{l^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$$

dF diretta da P verso Q

Definizione della superficie di riferimento

Ricordando la relazione esistente tra potenziale e forza si può scrivere:

$$\frac{\partial dV}{\partial l} = dF \quad \rightarrow \quad dV = \int dF \cdot dl = \int \frac{G \cdot dm}{l^2} dl = \frac{Gdm}{l}$$

E quindi il potenziale dovuto a tutta la massa della terra:

$$\boxed{V(X,Y,Z) = G \cdot \iiint_{V_{TERRA}} \frac{dm}{l}}$$

Il potenziale W risulta dalla somma del potenziale V, relativo alla forza di attrazione gravitazionale e dal potenziale v relativo alla forza centrifuga *(i potenziali possono essere sommati perchè sono funzioni scalari)*

Se poniamo W = cost :

$$V(X,Y,Z) + v(X,Y) = \text{cost} \quad \Leftarrow \quad \text{Famiglia di superfici equipotenziali}$$

Definizione della superficie di riferimento

La superficie equipotenziale del campo gravitazionale, che passa per il punto di quota zero, definito dal livello medio del mare, si chiama GEOIDE

$$V(X, Y, Z) + v(X, Y) = W_0$$

Per determinare il primo termine di tale equazione occorrerebbe conoscere la funzione δ(a,b,c), ovvero come varia la densità per ogni punto della terra.

E' IMPOSSIBILE DETERMINARE RIGOROSAMENTE L'EQUAZIONE DEL GEOIDE

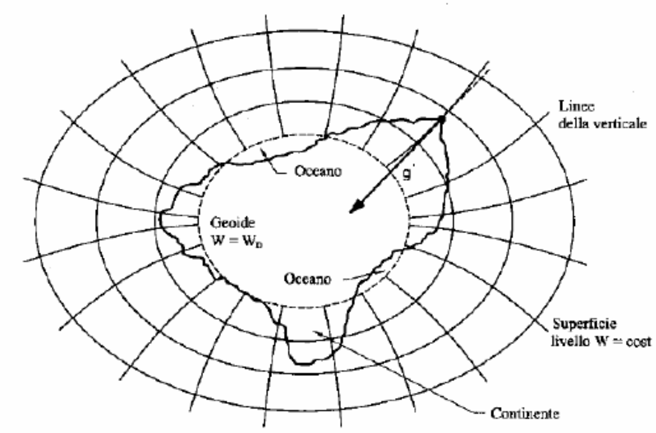
Bisogna trovare un'epressione approssimata del potenziale V(X,Y,Z)

L'integrale per il calcolo del potenziale della forza di attrazione universale, viene determinato mediante uno sviluppo in serie di funzioni sferiche dopo aver sostituito le coordinate geocentriche con le coordinate polari σ, ψ, λ.

Definizione della superficie di riferimento

Per tale motivo diviene impossibile determinare rigorosamente l'equazione del geoide e tale superficie risulta difficile da utilizzare.

Opportune semplificazioni e approssimazioni permettono di adottare superfici più semplici che meglio si prestano ad essere utilizzate per i calcoli.



Ne discende che essendo impossibile determinare il geoide bisogna accontentarsi di calcolare le deviazioni di questo da una superficie che da esso si scosti il meno possibile.

Definizione della superficie di riferimento

Consideriamo ora un ellissoide di rotazione avente gli stessi semiassi a e c dello sferoide. Esso sarà definito nel sistema geocentrico

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Dalla definizione di schiacciamento:

$$c = a \cdot (1-\alpha) \rightarrow c^2 = a^2 \cdot (1-\alpha)^2 = a^2 \cdot (1+\alpha^2 - 2\alpha)$$

Lo schiacciamento α vale circa 1/300 e quindi, trascurando il termine α^2, pari a circa 1/90.000 ≈ $1 \cdot 10^{-5}$, si commetterà un errore nella determinazione del semiasse minore c di circa 35m (*errore del tutto accettabile*)

Quindi, a meno di termini in α^2:

$$c^2 = a^2 \cdot (1-2\alpha)$$

Ellissoidi di riferimento

La geometria ellissoidica, seppur complessa, è più semplice della geometria sferoidica.

Il compito dei geodeti è quello di determinare i semiassi maggiore e minore a e c, ovvero a e α. I metodi si basano su misure geometriche (*misure di archi di meridiano e parallelo*), su misure di gravità e di tracciamento di orbite di satelliti artificiali.

Nel corso degli anni molti geodeti hanno lavorato su tale problema e hanno determinato valori diversi di a e α:

	a [m]	α
BESSEL (1841)	6.377.397	1/299.2
CLARKE (1880)	6.378.243	1/293.5
HAYFORD (1909)	**6.378.388**	**1/297.0**
WGS84 (1984)	**6.378.137**	**1/298.257223563**

Ellissoidi di riferimento

NOME	anno	Semiasse maggiore a (m)	Semiasse minore b (m)	schiacciamento α	Utenti-Note
Bounguer	1738	6. 397. 300		1/216.8	
Delambre	1810	6. 375. 653		1/334.0	
Everest	1830	6. 377. 276	6. 356. 075	1/300.8	India
Bessel	***1841***	***6. 377. 397***	***6. 356. 079***	***1/299.1***	Germania, Indonesia, Paesi Bassi
Airy	1858	6. 377 . 563	6. 356. 257	1/299.3	Gran Bretagna
Pratt	1863	6 .378. 245		1/295.3	
Clarke	1866	6 .378. 206	6. 356. 584	1/294.9	USA
Clarke modificato	1880	6 .378. 249	6. 356.515	1/293.5	Sud Africa
Hayford (Internaz.)	***1909***	***6. 378. 388***	***6. 356. 912***	***1/297.0***	Usato dalla cartografia italiana. adottata internazionalmente nel 1924
Krassovsky	1948	6. 378. 245	6. 356.863	1/298.3	Russia, Paesi Orientali
WGS 60	1960	6. 378. 165		1/298.3	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti)
National Australian	1965	6. 378. 165		1/298.3	
WGS 66	1966	6. 378. 145		1/298.25	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti)
I.U.G.G.	1967	6. 378. 160	6. 356. 775	1/298.25	adottato internazionalmente
South America	1969	6. 378. 160	6. 356. 774	1/298.3	
WGS 72	1972	6. 378. 135	6. 356. 750	1/298.258	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti)
WGS 84 (GRS)	***1984***	***6. 378. 137***	***6. 356. 752***	***1/298.257***	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti), usato per la determinazione del GPS

Il meridiano terrestre come metro di paragone

La misura della Terra è stata parametro fondamentale anche per la definizione di grandezze che apparentemente non hanno nessun legame con essa.
Vi siete mai chiesti, ad esempio, perché un metro è lungo proprio un metro? Ebbene questa misura deriva dalla lunghezza del meridiano terrestre.
La sua storia comincia nel 1792, in Francia, nel periodo della Rivoluzione.
Fino ad allora, in Francia come nel resto del mondo, esistevano un'infinità di unità di misura, diverse non solo da uno Stato all'altro, ma anche all'interno di una regione, di una provincia o di un distretto. Unità diverse nel nome e a volte diverse nel valore, anche se con lo stesso nome. E per una stessa grandezza, ad esempio la lunghezza, unità diverse, a seconda che si misurassero campi o stoffe o edifici.
Questa organizzazione era un'eredità del sistema feudale, che limitava gli scambi commerciali fra le varie aree geografiche, facilitava i raggiri nelle compravendite e rendeva difficile una tassazione uniforme.

Il meridiano terrestre come metro di paragone

Lo spirito illuminista che guidava la Rivoluzione francese non poteva tollerare questa fonte di disuguaglianza fra i cittadini.
Questo convinse il governo rivoluzionario ad incaricare la comunità degli scienziati, attraverso l'Accademia delle Scienze, della definizione di un sistema di unità di misura universale, ricavato da parametri non soggetti all'arbitrio umano.
Per soddisfare questo requisito, sembrò ovvio rivolgersi alle grandezze della natura, considerate oggettive e immutabili.

Dopo ampie discussioni, per la lunghezza fu deciso che *l'unità base sarebbe stata pari alla decimilionesima parte dell'arco di meridiano compreso fra il Polo Nord e l'Equatore e passante per Parigi*.

Definizione della superficie di riferimento

Gli studi e le ricerche che sono stati condotti storicamente per la determinazione della superficie fisica della Terra, e quindi per la determinazione della superficie di riferimento da utilizzare nelle operazioni di misura, hanno portato ad individuare ***due differenti superfici***:

•la prima è una superficie, denominata ***geoide***, che rappresenta la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre passante per il livello medio dei mari. Soddisfa la condizione di essere facilmente individuabile fisicamente (la direzione e il verso del campo gravitazionale possono infatti essere individuati con facilità), ma non è matematicamente trattabile;

•la seconda è un ***ellissoide di rotazione***, cioè un ellissoide biassiale, di forma e dimensioni assegnate. E' una superficie geometrica facilmente trattabile dal punto di vista matematico, ma non possiede alcun significato fisico.

L'utilizzo di queste **due differenti superfici di riferimento** ha comportato nel posizionamento classico la <u>separazione della determinazione della componente altimetrica da quella planimetrica</u>.

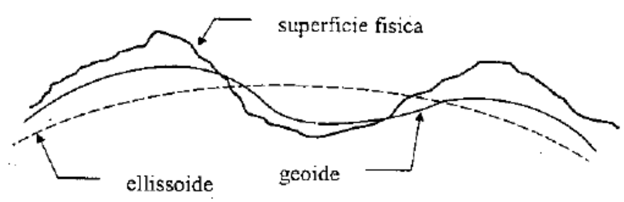
Definizione della superficie di riferimento

- **il geoide** rappresenta la *superficie di riferimento utilizzata per la determinazione delle quote*,

- **l'ellissoide** è utilizzato per la *definizione delle coordinate planimetriche*.

GEOIDE → per l'altimetria

ELLISSOIDE → per la planimetria

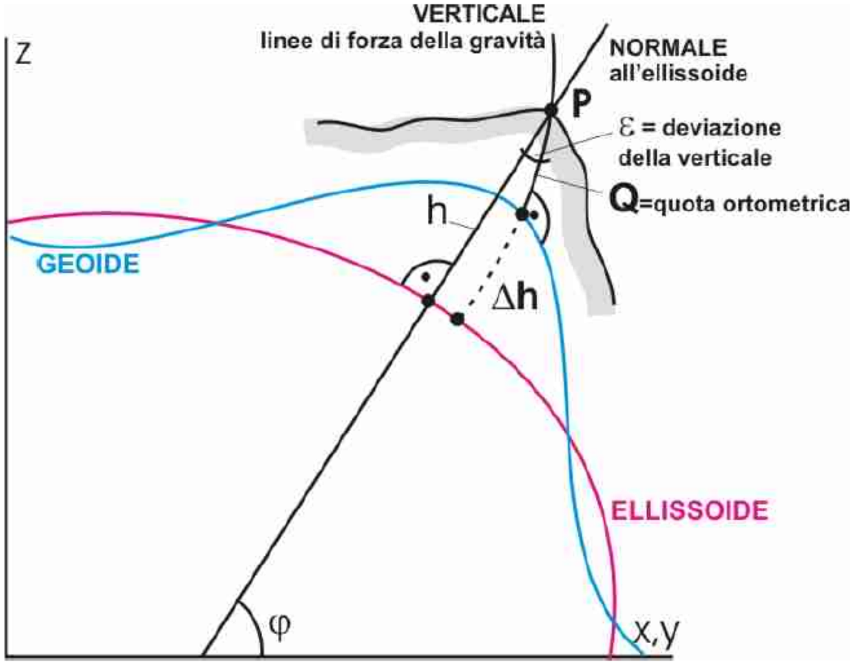


Quota ellissoidica e geoidica

Come conseguenza, in un punto P della superficie terrestre si potranno definire due normali, ognuna relativa alla corrispondente superficie di riferimento:

la normale al geoide (o verticale)

la normale all'ellissoide.



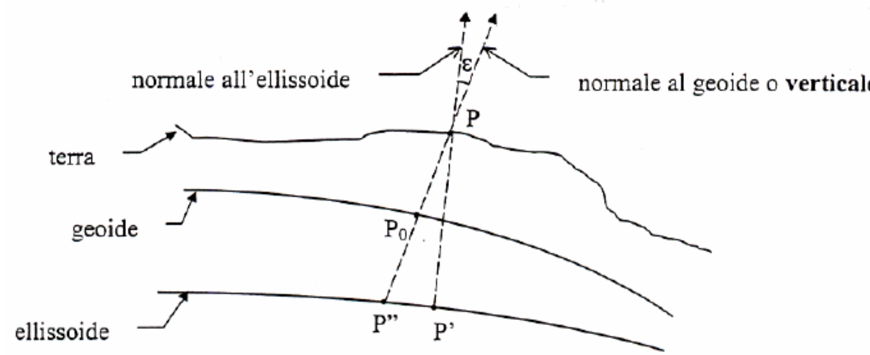
Questo comporta che la verticale in un generico punto P del geoide non coincide con la normale all'ellissoide.

L'angolo da esse formato viene detto **deviazione della verticale** ed è dell'ordine di qualche secondo sessagesimale.

Quota ellissoidica e geoidica

La relazione tra quota ellissoidica h e quota ortometrica H si esprime definendo *l'ondulazione del N del geoide*:

$$N = h - H$$

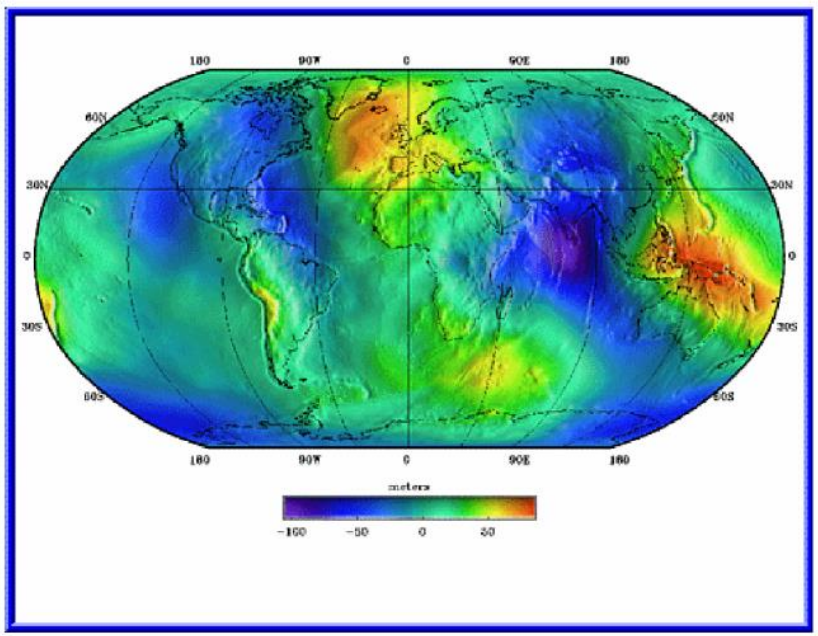


$P_oP'' = N$	*ondulazione del geoide* (*differenza tra ellissoide e geoide in un punto*). In Italia varia da +37 m in Calabria a +52 m in Val D'Aosta PP' = h quota ellissoidica del punto P
$PP_o = H$	quota ortometrica o quota del punto P
ε	deviazione della verticale (vale poche decine di secondi sessagesimali, e varia da zona a zona).

Quota ellissoidica e geoidica

ONDULAZIONE DEL GEOIDE
SECONDO IL MODELLO GLOBALE EGM96,
DAL SITO: HTTP://CDDISA.GSFC.NASA.GOV/926/EGM96/EGM96.HTML

N=h-H



Quota ellissoidica e geoidica

La deviazione della verticale comporta numerose implicazioni, alcune delle quali anche di carattere pratico:

è infatti evidente che l'unica direzione fisicamente determinabile è quella della verticale, cioè della normale al geoide, ed essa costituisce quindi il riferimento naturale e fondamentale al quale sono legate le misure di carattere topografico eseguite sulla superficie fisica della Terra.

Gli elementi misurati vengono poi utilizzati per individuare la posizione relativa ed assoluta dei punti mediante procedimenti di calcolo da svilupparsi sulla superficie di riferimento e quindi, in generale, sull'ellissoide di rotazione:

è quindi evidente che è necessario, almeno in linea teorica, apportare agli elementi misurati, riferiti alla verticale, delle opportune correzioni per dedurne quelli corrispondenti riferiti alla normale ellissoidica.

Tali correzioni, sono in generale, molto piccole e di conseguenza possono essere trascurate nella quasi generalità dei casi, se non per misure di altissima precisione o in condizioni particolari di forti deviazioni della verticale.

Ellissoide

Considerando un ellissoide di rotazione di parametri a e c noti, restano definite le quantità:

schiacciamento $\alpha = \dfrac{a-c}{a}$

prima eccentricità $e^2 = \dfrac{a^2-c^2}{a^2}$

seconda eccentricità $e'^2 = \dfrac{a^2-c^2}{c^2}$

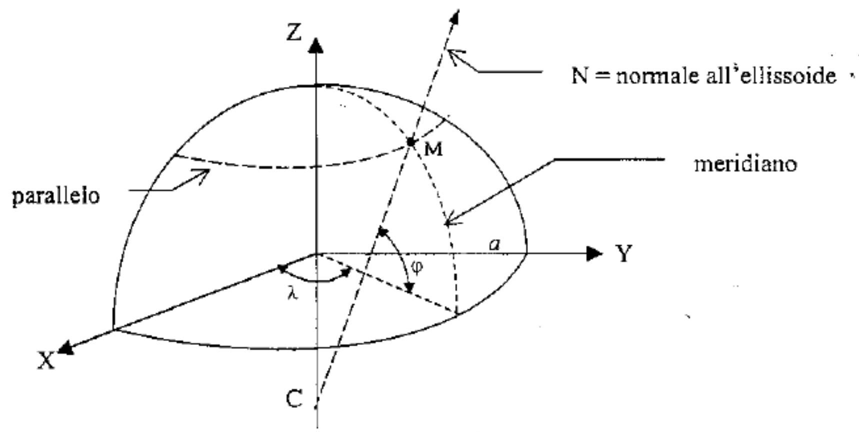
Fra tali quantità sussistono le seguenti relazioni:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \qquad e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} \qquad \left(1-e^2\right)\cdot\left(1+e'^2\right) = 1 \qquad \alpha = 1-\sqrt{1-e^2}$$

$$e^2 = 2\alpha-\alpha^2 \qquad \frac{a}{c} = \sqrt{1+e'^2} \qquad \frac{c}{a} = \sqrt{1-e^2} = 1-\alpha$$

Coordinate geografiche ellissoidiche

La generatrice, e di conseguenza ogni meridiano, è un ellisse di semiassi a e c detta ELLISSE MERIDIANA



Preso un punto generico M appartenente all'ellissoide, la normale N ad esso relativa incontra l'asse polare di rotazione in C, che rappresenta il centro di curvatura dell'ellisse meridiana in M.

Latitudine φ → angolo acuto che N forma con il piano equatoriale XY

Longitudine λ → angolo diedro che il semipiano meridiano per M forma con un semipiano meridiano origine

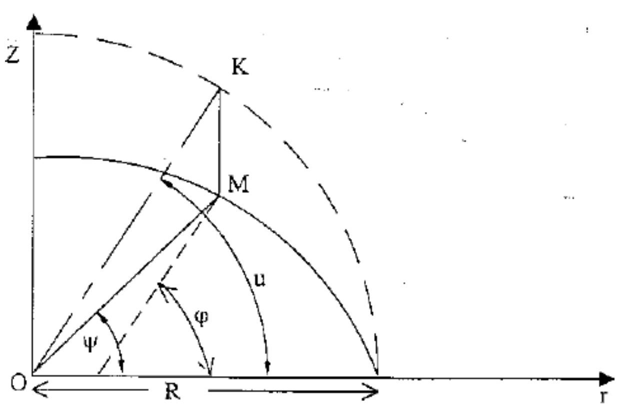
Coordinate geografiche ellissoidiche

Paralleli → linee di uguale latitudine

Meridiani → linee di uguale longitudine

I parametri φ, λ, ogni coppia dei quali individua univocamente il punto M e la direzione N, costituiscono un sistema di coordinate curvilinee superficiali dette:

COORDINATE GEOGRAFICHE ELLISSOIDICHE



Considerando la sezione meridiana contenente M:

Latitudine ridotta u → angolo compreso tra il segmento OK e l'asse r

Latitudine geocentrica ψ → angolo compreso tra il segmento OM e l'asse r

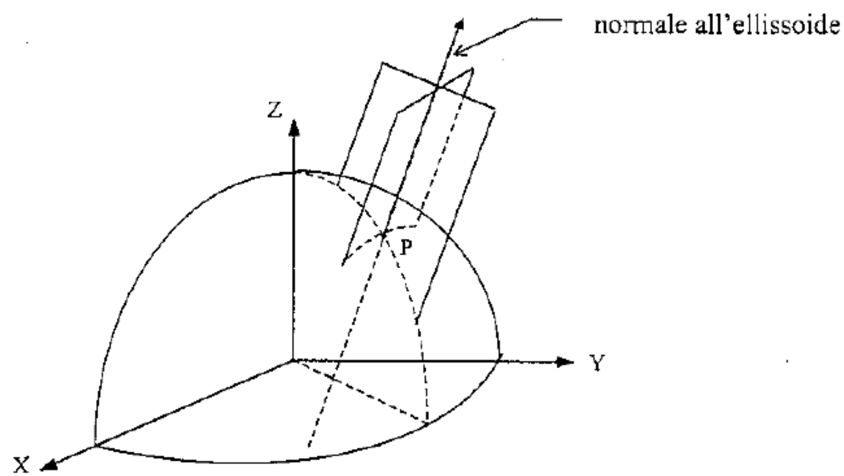
$$\psi < u < \varphi$$

Raggi di curvatura e sezioni normali

Consideriamo un punto P giacente sull'ellissoide e la sua normale:

SEZIONE NORMALE → Linea di intersezione con l'ellissoide dei piani appartenenti al fascio di piani aventi come sostegno la normale in P.

SEZIONE OBLIQUA → Tutte le altre intersezioni tra un piano che non contiene la normale e l'ellissoide.

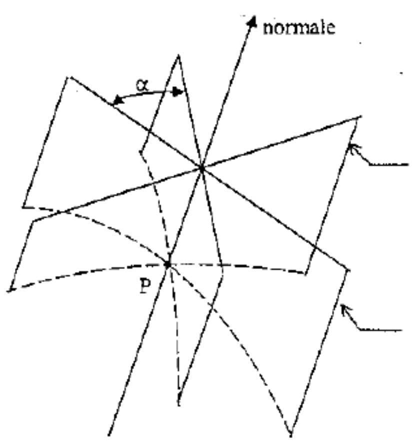


Raggi di curvatura e sezioni normali

Le sezioni normali in P hanno raggio di curvatura variabile a seconda dell'angolo che formano con il piano che definisce la sezione normale MERIDIANO.

SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

- Meridiano per P
- Ortogonale al meridiano per P → piano che contiene la tangente al parallelo per P



piano che definisce la sezione normale principale con raggio di curvatura in P pari a N

piano che definisce il meridiano (sezione normale principale che ha raggio di curvatura in P pari a ρ)

Raggi di curvatura principali

ρ → raggio minimo

N → raggio massimo

Coordinate geografiche

Il sistema di coordinate universalmente adottato è quello delle **coordinate geografiche**, che individuano la posizione di un punto della superficie mediante due valori angolari, che definiscono la direzione della normale alla superficie stessa nel punto considerato.

Se tale normale è quella geoidica, ossia la verticale, si parla comunemente di *coordinate geografiche astronomiche o geoidiche*;

se la normale che si considera è invece quella all'ellissoide si hanno le *coordinate geografiche ellissoidiche*;

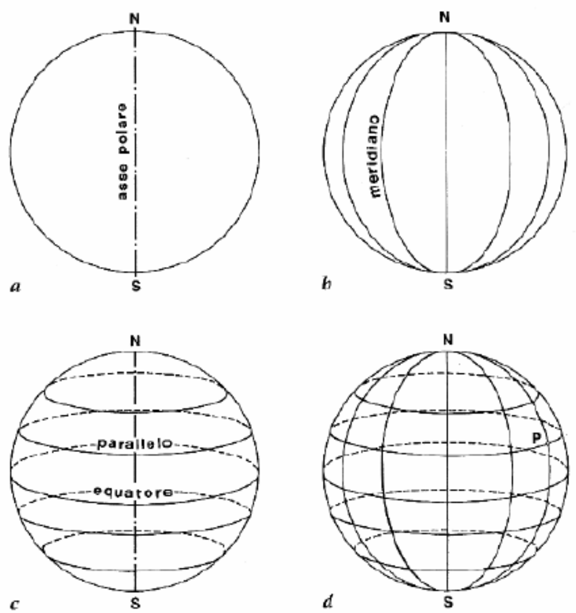
quando non esiste possibilità d'equivoco, generalmente s'intendono queste ultime come coordinate geografiche.

E' opportuno precisare che le **coordinate astronomiche** si determinano mediante misure di astronomia geodetica, legate alla realtà fisica della verticale nel punto e sulle cui modalità operative e di calcolo non possiamo entrare in dettagli.

Le **coordinate ellissoidiche** vengono invece calcolate sulla superficie di riferimento in base a misure di angoli e distanze eseguite, con le modalità che vedremo, sulla superficie fisica della Terra.

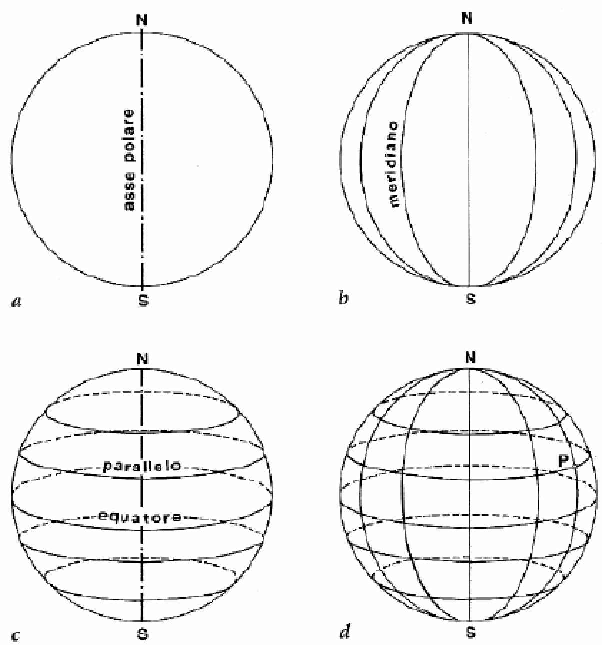
Coordinate geografiche

L'ELLISSOIDE, al contrario del geoide è una superficie di rotazione, e la normale ad esso in un punto generico è, contrariamente alla verticale, sempre complanare con l'asse polare.



Sezionando l'ellissoide terrestre, prima con un fascio di piani aventi per spigolo lo stesso asse di rotazione poi con un infinito insieme di piani paralleli normali all'asse di rotazione, è possibile istituire sull'ellissoide terrestre due distinte famiglie di curve, denominate rispettivamente meridiani e paralleli, che si intersecano ad angolo retto, suscettibile di assicurare la definizione univoca della posizione geografica dei punti considerati.

Coordinate geografiche



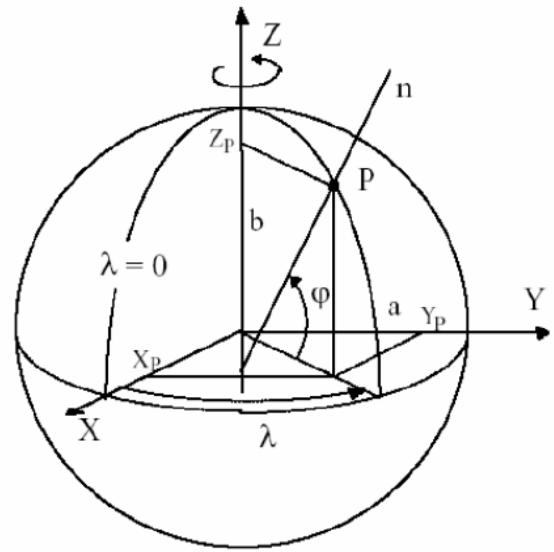
Assumiamo come parallelo origine quello relativo all'equatore terrestre, avente il raggio massimo e uguale al semiasse a, e come meridiano origine quello che individua il meridiano di base o fondamentale:

la posizione di un punto P sull'ellissoide terrestre sarà determinata dalla coppia di linee coordinate che si intersecano nello stesso punto P.

Queste due famiglie di curve sono tra loro ortogonali e costituiscono il reticolato geografico che verrà opportunamente trasferito sul piano della carta.

Coordinate geografiche

Consideriamo un punto P appartenente all'ellissoide e la normale superficiale ad esso relativa n: questa incontra l'asse polare di rotazione in C che rappresenta il centro di curvatura dell'ellisse meridiana in P.



La posizione del punto P si individua con la misura dell'angolo φ che la normale n in P all'ellissoide forma col piano equatoriale, e la misura dell'angolo diedro λ che il piano contenente il meridiano passante per il medesimo punto P forma col piano contenente il meridiano origine.

Coordinate geografiche

Le grandezze φ e λ vengono chiamate coordinate geografiche ellissoidiche:

- φ latitudine geografica ellissoidica del punto P;
- λ longitudine geografica ellissoidica.

E' importante osservare che i parametri φ *e* λ , *individuano sia la direzione della normale all'ellissoide nel punto sia la posizione del punto per cui essa passa (coordinate curvilinee).*

- L'equatore può essere definito come luogo geometrico dei punti aventi latitudine zero;
- Il meridiano origine o fondamentale può essere definito come luogo geometrico dei punti aventi longitudine zero.

Nel 1884 l'International Meridian Conference (tenutasi a Washington D. C. , USA) decise che il meridiano fondamentale dovesse essere quello passante per il Royal Observatory di Greenwich (Londra).

Coordinate geografiche

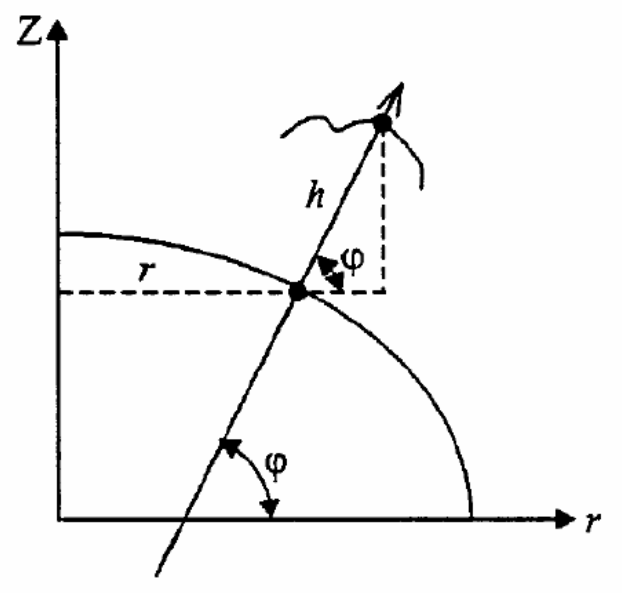
•**la *latitudine ellissoidica*** φ del punto P si specifica in latitudine nord e latitudine sud a seconda che il punto giaccia nell'emisfero boreale (dall'equatore verso il polo Nord) o australe (dall'equatore verso il polo sud).

La latitudine φ varia fra 90° Sud (=-90°) e 90° Nord (=+90°) passando dal polo Sud al polo Nord;

• ***la longitudine ellissoidica*** λ di P si specifica in longitudine est o longitudine ovest a seconda che il punto sia ad est o a ovest del meridiano fondamentale di Greenwich.

I valori di longitudine sono dunque compresi fra 180° Ovest (-180°) e 0° per l'emisfero a ovest di Greenwich e fra 0° e 180° Est (+180°) per l'emisfero a est di Greenwich.

Coordinate geografiche



Nel caso che il punto P non appartenga all'ellissoide le sue coordinate geografiche ellissoidiche sono rappresentate dalla terna (φ_e , λ_e , h) dove h è la quota ellissoidica.

Raggi di curvatura e sezioni normali

<u>La lunghezza di 1° di latitudine</u> geografica <u>varia a seconda della latitudine</u> a cui ci si trova, per effetto dello *schiacciamento terrestre*.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\Delta\varphi$ = 1° (in km)	110.57	110.61	110.70	110.85	111.04	111.23	111.41	111.56	111.66	111.69

Tabella: Lunghezza di 1° di latitudine geografica in funzione della latitudine φ (ellissoide WGS84): per carte a grande scala si tratta di una differenza non trascurabile.

<u>La lunghezza di 1° di longitudine</u> geografica <u>varia a seconda della latitudine</u> a cui ci si trova. Questo è dovuto alla cosiddetta "*convergenza dei meridiani*", cioè al fatto che le linee dei meridiani si incontrano ai Poli.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\Delta\lambda$ = 1° (in km)	111.32	109.64	104.65	96.49	85.39	71.70	55.80	38.19	19.39	0.00

Tabella:Lunghezza di 1° di longitudine geografica in funzione della latitudine φ (Ellissoide WGS84).

Raggi di curvatura e sezioni normali

Raggio medio di curvatura

In un punto P, si definisce **raggio medio di curvatura** delle infinite sezioni normali all'ellissoide, la media geometrica tra il raggio minimo e massimo

$$R_m = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{\rho N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 sen^2\varphi} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}$$

E' un parametro di grande interesse nella semplificazione delle elaborazioni analitiche geodetiche e topo-cartografiche.

Risulta minimo all'equatore (φ=0) e massimo ai poli (φ=90°).

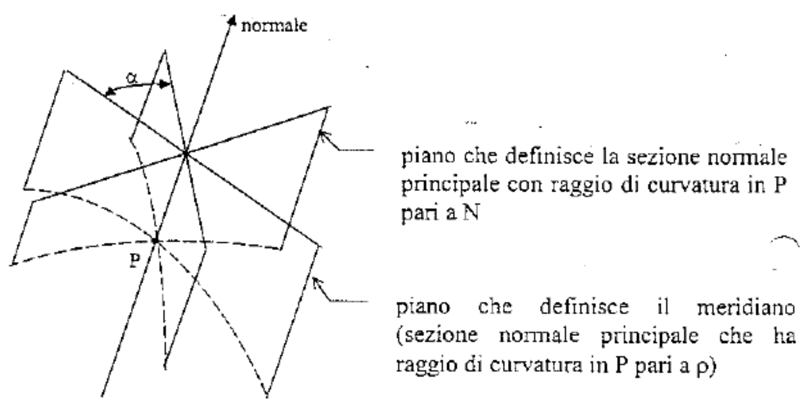
Tale raggio R_m può considerarsi come il raggio di una sfera, detta **sfera locale**, tangente l'ellissoide nel punto P e che meglio l'approssima in un intorno di circa 100 km di raggio del punto stesso.

Raggi di curvatura e sezioni normali

Il raggio di curvatura R_α di una sezione normale generica, che forma un angolo α, chiamato AZIMUT, con il meridiano, in funzione del raggio di curvatura minimo ρ e massimo N è dato da:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$

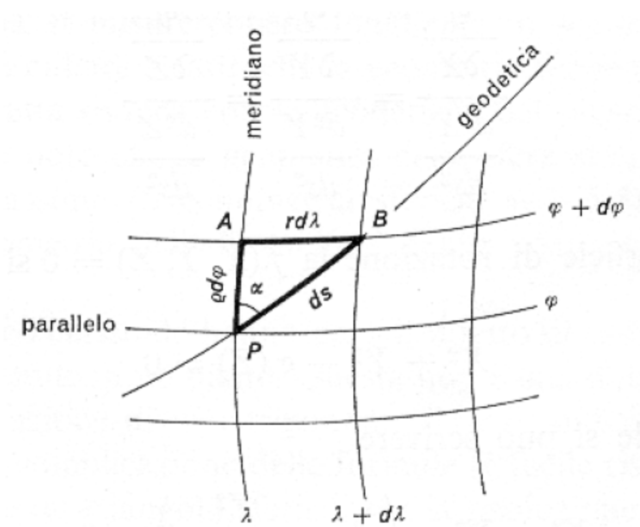
Teorema di EULERO

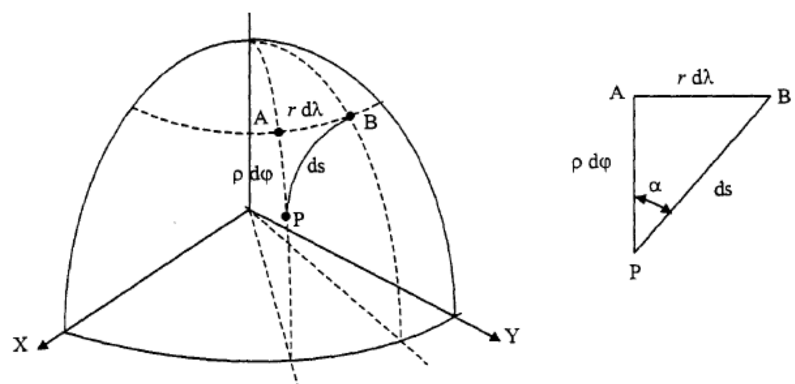


Archi di meridiano e parallelo

LUNGHEZZA DI ARCHI FINITI DI PARALLELO E DI MERIDIANO

La determinazione della ***lunghezza di archi finiti di parallelo* e *di meridiano*** ha notevole importanza soprattutto in relazione alla determinazione geometrica dei parametri dell'ellissoide terrestre.



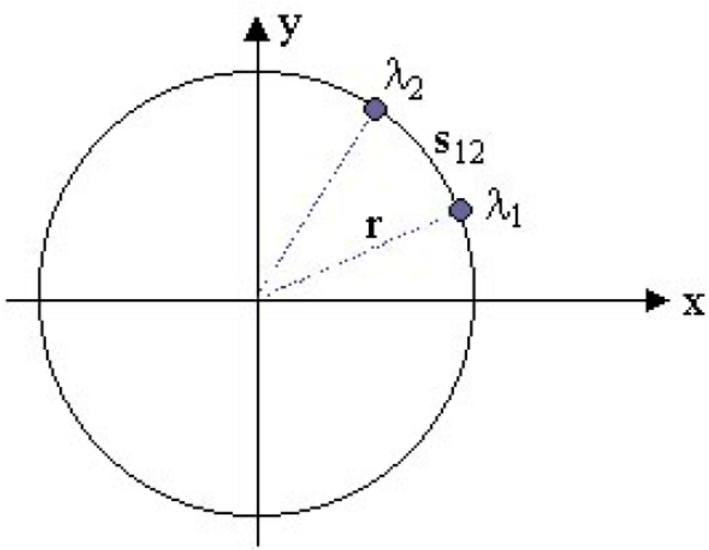


Triangolo infinitesimo sull'ellissoide di rotazione

Archi di meridiano e parallelo

La lunghezza di un arco di parallelo di latitudine φ, compreso fra le longitudini λ_1 e λ_2, si ottiene integrando:

$$l_p = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r d\lambda = r \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$$



Dove:

r → raggio del parallelo

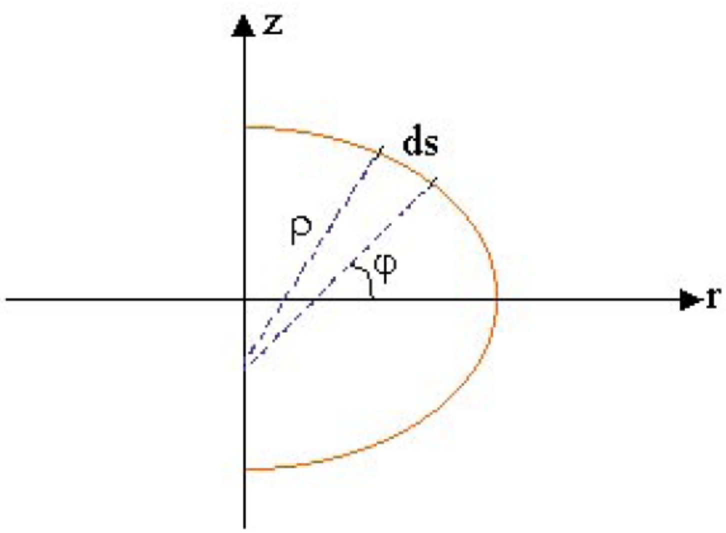
$$r = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

le longitudini $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ vanno espresse in radianti.

Archi di meridiano e parallelo

Analogamente per il calcolo della ***<u>lunghezza dell'arco di meridiano</u>***, integrando tra due valori della latitudine φ_1 e φ_2:

$$l_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = a\left(1 - e^2\right)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}} d\varphi$$



Dove:

ρ → raggio del meridiano

$$\rho = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$