

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 11 MARZO 2020

- PRIMA PARTE

SISTEMI OLONOMI $\rightarrow$ GRADI DI LIBERTÀ

$$\underline{q} = (q_1, \dots, q_r)$$



PRINCIPIO LAVORI VIRTUALI

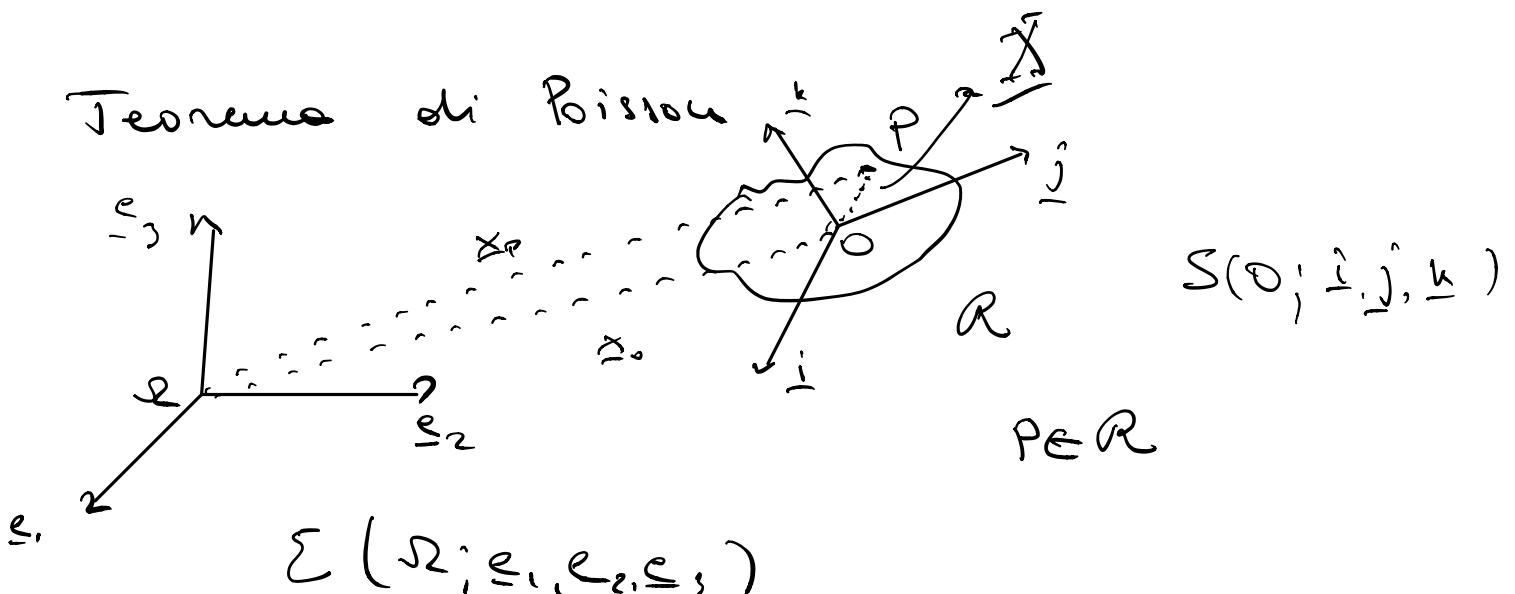
$$\delta V = 0$$

all'equilibrio
(spostamenti virtuali)

COME CALCOLARE IL L.V. PER UN RIGIDO

$\rightarrow$ CINEMATICA

Teorema di Poisson



$$\underset{\Sigma}{\underline{x}_p(\tau)} = \underset{\Sigma}{\underline{x}_0(\tau)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ \text{di rotazione}}}{R(\tau)} \cdot \underset{\substack{\nwarrow S}}{\underline{X}}$$

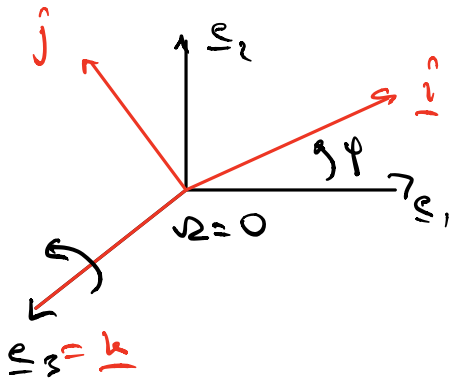
Poisson : $\frac{d}{dt} x_p(t) = \frac{d}{dt} x_0(t) + \underline{\omega} \wedge (x_p - x_0)$

ω $\Rightarrow$ contains l'info $A = \dot{R} R^T$
 $\downarrow$ 3×3 antisymmetric
 $\in \mathbb{R}^3$ 3 components 3 components:

Significato fisico di ω

$\omega = 0$ $\rightarrow$ Translations

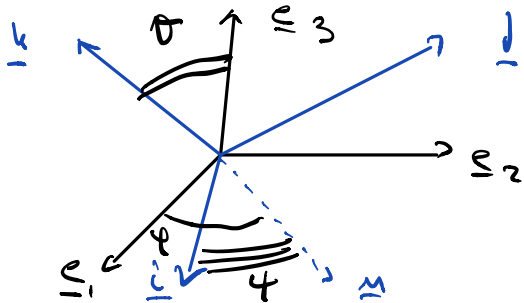
Definizione: il tempo del cammino è fissato



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e}_3 = \dot{\varphi} \underline{k}$$

Prescription



12 10 1 4

9. 12

θ $\frac{1}{k}$ r $\frac{1}{p_2}$

4 1 9 3

Angoli di Eulero $\rightarrow R$ = composizione
 di 3 rotazioni elementari attorno a 3
 assi distinti $(\underline{e}_3, \underline{u}, \underline{k})$, di 3
 angoli (φ, θ, ψ) .

$$\rightarrow \underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e}_3 + \dot{\theta} \underline{u} + \dot{\psi} \underline{k}$$

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$
 $\underline{u} = \underline{e}_3 \wedge \underline{k}$

Sappiamo $\underline{\omega}$

Usiamo il Teorema di Poisson per
 calcolare il lavoro virtuale

$$P \in R \rightarrow \delta \underline{x}_P = \delta \underline{x}_0 + \underline{x} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $\underline{x} = \delta \varphi \underline{e}_3 + \delta \theta \underline{u} + \delta \psi \underline{k}$

$$L V = \sum_{P \in R} \underline{F}_P \cdot \delta \underline{x}_P = \dots$$

$$= \delta \underline{x}_0 \cdot \underline{R} + \underline{x} \cdot \underline{H}(0)$$

$\uparrow$

$$\underline{R} = \sum_{P \in R} \underline{F}_P \quad \text{risultante del sistema di forze}$$

$$\underline{H}(0) = \sum_{P \in R} (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \wedge \underline{F}_P \quad \begin{array}{l} \text{momento} \\ \text{risultante} \end{array}$$

Rigido 3D $\rightarrow$ 6 coord where

$$(x_0, y_0, z_0, \phi, \theta, \psi)$$

Forme generalizzate

3 d.o.f. $Q_{x_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_1, \quad Q_{y_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2, \quad Q_{z_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_3$

$$Q_\phi = \underline{M}(0) \cdot \underline{e}_3 \quad Q_\theta = \underline{M}(0) \cdot \underline{u}$$

$$Q_\psi = \underline{M}(0) \cdot \underline{k}$$

Campo di velocità per un rigido, asse

istantaneo di moto

Formula di Poisson $\underline{v}_P(\underline{x}_P) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)$

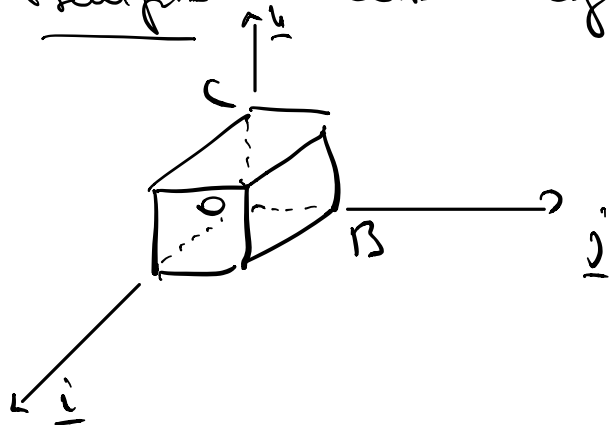
$$\underline{v}_P := \frac{d}{dt} \underline{x}_P \quad \text{velocità del punto } P$$

(fisica, virtuale)

$\underline{v}_P = \underline{v}_P(\underline{x}_P)$ definisce un campo vettoriale di velocità

legge che ad ogni punto P , di posizione $\underline{x}_P$, associa il vettore $\underline{v}_P$

Esempio Corpo rigido



Consideriamo il caso

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_0 &= c \underline{k} \\ \underline{\omega} &= \omega_0 \underline{k} \end{aligned} \right\}$$

Poincaré: $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0)$

$$= c \underline{k} + \omega_0 \underline{k} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

Con:

• $\omega_0 = 0$: $\underline{v}(\underline{x}) = c \underline{k} \quad \forall \underline{x}$

il corpo trasla con velocità costante $c \underline{k}$

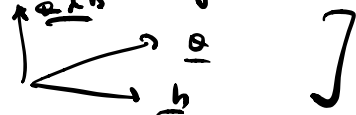
• $\omega_0 \neq 0$ $\underline{v}(\underline{x}) = c \underline{k} + \omega_0 \underline{k} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0)$

velocità
costante verso
 $\underline{k}$

velocità di $\underline{x}$
è ortogonale a $\underline{k}$
e a $\underline{x} - \underline{x}_0$
dovuta a $\underline{\omega}$

[Ricordiamo $\underline{a}, \underline{b}$ vettori

$\underline{a} \wedge \underline{b}$ è ortogonale a $\underline{a}, \underline{b}$



$\underline{v}$:



moto di
avvitamento
intorno a $\underline{k}$

Questo moto è detto elicoidale, perché
il moto di un punto qualunque ($\neq \underline{k}$)
è un'elica cilindrica.

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 11 MARZO 2020

— SECONDA PARTE

Campo di velocità per un rigido

$$\begin{array}{c} \underline{v}_p(\underline{x}_p) \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} \underline{v}_0 \\ \uparrow \end{array} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$$

In generale $\underline{v}_0(\tau)$ e $\underline{\omega}(\tau)$ funzioni di τ

$$\left. \begin{array}{l} \tau \rightarrow \tau + \delta\tau \\ x \rightarrow x + \delta x \\ \varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Fissiamo τ : parliamo di atto di moto

(Translatorio, rotatorio, elicoidale, ...)

L'info sullo stato della velocità ad un dato τ fissato, mi dice solo come il corpo ha "intenzione" di muoversi a quell'istante τ .

Per τ successivi, in generale la situazione è diversa (se c'è accelerazione, il campo delle velocità cambia)

Prendiamo un rigido generico

1) se $\underline{\omega} = 0 \Rightarrow \underline{v}(x) = \underline{v}_0 \quad \forall x$ e quindi

tutti i punti hanno la stessa velocità

2) se $\underline{\omega} \neq 0 \Rightarrow$ moltiplichiamo $\underline{v}(x)$ per

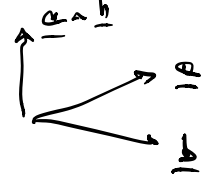
il vers $\underline{\omega}$

$$\underline{v}(x) \cdot \text{vers } \underline{\omega} = \underline{v}_0(x) \cdot \text{vers } \underline{\omega} + \underbrace{\left[\underline{\omega} \wedge (x - x_0) \right] \cdot \text{vers } \underline{\omega}}_{=0 \text{ perché}}$$

↑
Perché

$\underline{\omega} \wedge (x - x_0)$ è $\perp$

a $\underline{\omega}$



Conseguente $\rightarrow \underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega} = \text{costante}$
indipendente da $\underline{x}$

$$\underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega} = I \quad \text{"invariante scalare"}$$

La componente della velocità lungo la
direzione di $\underline{\omega}$, è uguale per tutti i punti.

$$\underline{v}(\underline{x}) \cdot \text{vers } \underline{\omega} = I$$

$\uparrow$ dipende da $\underline{x}$ $\uparrow$ indipendente da $\underline{x}$

3) $\underline{\omega} \neq \underline{0}$. Siano P e P' punti distinti
del rigido, possiamo avere $\underline{v}_P = \underline{v}_{P'}$
se e solo se $(\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$ è parallelo a $\underline{\omega}$

Infatti: per Poisson

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{P'} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$$

[Teorema di Reimann : $0 \equiv P'$]

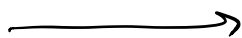
$$\underline{v}_P = \underline{v}_{P'} : \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'}) = \underline{0}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
sono paralleli

Fisicamente: Tutti i punti appartenenti ad
una retta qualsiasi di direzione $\underline{\omega}$, hanno

la stessa velocità

Dal comp. delle
velocità



informazione
sull'atto di moto

Teorema di Mozzi

Ogni atto di moto di un rigido è
o traslatorio, se $\underline{\omega}(t) = \underline{0}$, oppure
elicoideale, se $\underline{\omega}(t) \neq \underline{0}$, intorno ad una
particolare retta, detta asse istantaneo di
moto (asse di Mozzi), A.I.M.

Inoltre, nel secondo caso, i punti dell'asse
istantaneo di moto (A.I.M.) hanno le
proprietà

$$\underline{v}(\underline{x}) = (\underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega}) \text{ vers } \underline{\omega} = \underline{c}$$

$$\forall \underline{x} \in \text{A.I.M.}$$

e l'equazione dell'A.I.M. :

$$\left[\underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2} + \lambda \underline{\omega} \right] \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Commenti

— dall'osservazione 2) fatto sopra

$$\underline{v}_p : \text{componente parallela a } \underline{\omega} + \text{componente ortogonale a } \underline{\omega}$$

• la componente parallela è proprio
 $\underline{c} = I \text{ vers } \underline{\omega}$ ($\leftarrow$ costante)

• la componente normale, varia con
il punto. La chiamiamo $\underline{u}(x)$

$$\underline{v}(x) = \underline{c} + \underline{u}(x)$$

$\uparrow \qquad \uparrow$
indipendenti
da x

$\Rightarrow$ Tutti i punti di A.I.M., per definizione
hanno $\underline{v}(x) \perp \underline{c}$ [cioè $\underline{u}(x) \perp \underline{c}$ se
 $x \in \text{A.I.M.}$] $\Rightarrow$ i punti di A.I.M.

hanno velocità minima (in modulo,
visto che $\underline{c} \perp \underline{u}$)

$$v^2 = (\underline{c} + \underline{u})^2 = \underline{c}^2 + \underline{u}^2 + 2 \frac{\underline{c} \cdot \underline{u}}{0}$$

→ somma di due quadratici:

su A.I.M. $\underline{v}^2 = \underline{c}^2 \quad \left(\text{perché} \right)$
 $\underline{u} = 0$

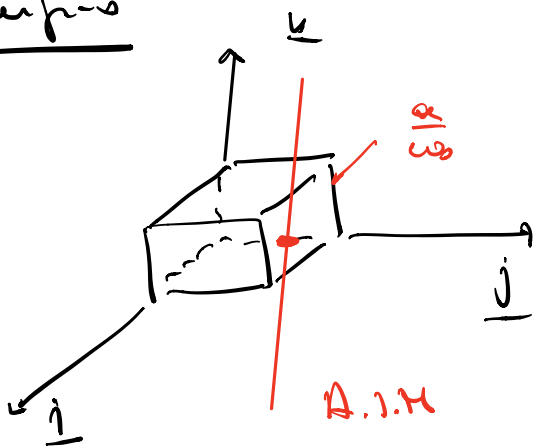
— $\underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{|\underline{\omega}|^2} + t \underline{\omega} \quad t \in \mathbb{R}$

è una retta di direzione $\underline{\omega}$ e
 passante per il punto del rigido

$\underline{x} - \underline{x}_0 = \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{|\underline{\omega}|^2}$

Ad ogni τ fissato, l'A.I.M. è determinata
 conoscendo $\underline{\omega}(\tau)$, $\underline{v}_0(\tau)$

Esempio



τ fissato

osserviamo

$\underline{v}_0 = a \underline{i} + b \underline{k} \leftarrow$

$\underline{\omega} = \omega_0 \underline{k}$

Allora

$\underline{c} = (\underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega}) \text{vers } \underline{\omega} = (\underline{v}_0 \cdot \underline{k}) \underline{k} =$
 $= b \underline{k}$

A.l.M. : ha direzione $\underline{\omega}$ ($\rightarrow \underline{k}$)

passo per il punto

$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \underline{\omega} \cdot \frac{\underline{k} \wedge \underline{v}_0}{\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \left(\underline{k} \wedge (a \underline{i} + b \underline{j}) \right) = \frac{1}{\omega_0} a \underline{j}$$

$$\underline{k} \wedge \underline{j} = \underline{j} \rightarrow \left(0, \frac{a}{\omega_0}, 0 \right)$$

Dimostrazione

• $\underline{\omega} = \underline{0} \rightarrow$ ovvio

Assumiamo $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

Abbiamo visto (proposizione 2)

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c} + \underline{u}(\underline{x})$$

$\downarrow$

$$\underbrace{(v_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega}) \text{ vers } \underline{\omega}}_I$$

Vogliamo vedere che

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c} \Leftrightarrow \underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}$$

solo per
per $\underline{x} \in \text{A.l.M.}$

Prendiamo l'eq dell' A.l.M.

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2} + t \underline{\omega}$$

verifichiamo $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c}$. Calcolo diretto

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

$$= \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge \left[\frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2} + t \underline{\omega} \right] =$$

$$= \underline{v}_0 + \frac{1}{\|\underline{\omega}\|^2} \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0]$$

usiamo l'identità

$$\underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$$

$$= \underline{v}_0 + \frac{1}{\|\underline{\omega}\|^2} [(\underline{\omega} \cdot \underline{v}_0) \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}) \underline{v}_0]$$

$$= \underline{v}_0 + (\underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega}) \text{vers } \underline{\omega} - \underline{v}_0$$

$$\text{vers } \underline{\omega} = \frac{\underline{\omega}}{\|\underline{\omega}\|}$$

$$\underline{\omega} \cdot \underline{\omega} = \|\underline{\omega}\|^2$$

$$= (\underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega}) \text{vers } \underline{\omega} = \underline{c}$$

Sia Q un punto dell' A.M. Prendiamo P qualunque e usiamo Poisson con $O \equiv Q$

Allora $\underline{v}_p(x_p) = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \wedge (x_p - x_Q)$

$$= \underline{c} + \underline{\omega} \wedge (x_p - x_Q)$$

↓

$$Q \in A.I.M. \Rightarrow \underline{v}_Q = \underline{c}$$

→ ci dice $\underline{v}_p$ è la somma di due

Termini

$\underline{c}$ (velocità diretta come $\underline{\omega}$)

$\underline{u}(x) = \underline{\omega} \wedge (x_p - x_Q)$ ortogonale a $\underline{\omega}$

↳ velocità di rotazione intorno all' A.I.M.

⇒ l'atto di moto è elicoidale intorno all' A.I.M.

Commento : se $\underline{c} = (\underline{v}_0 \cdot \text{vec} \underline{\omega}) \text{vec} \underline{\omega}$

→ il rigido non ha velocità lungo l' A.I.M. : moto puramente rotatorio

(A.I.M. → asse di istantanea rotazione)

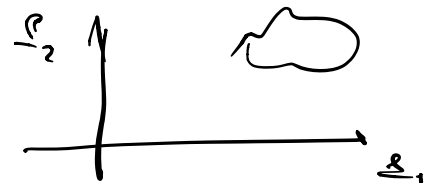
MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 11 MARZO 2020

- TERZA PARTE

Moto rigido piano e centro di istantanea rotation

Rigido piano



Nel piano vale sempre

se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$: $\underline{\omega}$ normale al piano
di moto

$\underline{v}_0$ appartiene al piano
del moto

$$\rightarrow \underline{\omega} = \underbrace{(\underline{v}_0 \cdot \text{vers } \underline{\omega})}_{=0} \text{vers } \underline{\omega} = \underline{0}$$

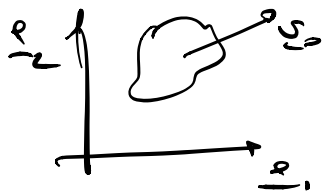
Teorema di Eulero

Ogni atto di moto del rigido piano
è o traslatorio ($\underline{\omega} = \underline{0}$) o rotatorio

($\underline{\omega} \neq \underline{0}$) intorno ad un punto C (Centro di Istantanea Rotazione, $C \in \mathbb{R}$) appartenente al piano e dato da

$$\underline{x}_C = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2}$$

Dim



$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_3, \quad \underline{v}_0 \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ l'atto di moto Σ non $\dot{\epsilon}$ traslatorio ($\underline{\omega} \neq \underline{0}$), $\dot{\epsilon}$ di pura rotazione (perch $\acute{e}$ $\underline{c} = \underline{0}$)

Consideriamo l'intersezione dell'A.I.M. con il piano di moto: ($\underline{e}_1, \underline{e}_2$)
 $\rightarrow$ poniamo $\lambda \neq 0$ nell'A.I.M., e

$$\text{otteniamo } \underline{x}_C = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2}$$

Propriet $\grave{a}$ del centro di istantanea rotazione:

1) supponiamo $\underline{\omega} \neq \underline{0}$. Allora il C.I.R. è l'unico punto con velocità nulla

$$\forall P \in R \quad \underline{v}_P = \underline{v}_C + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$$

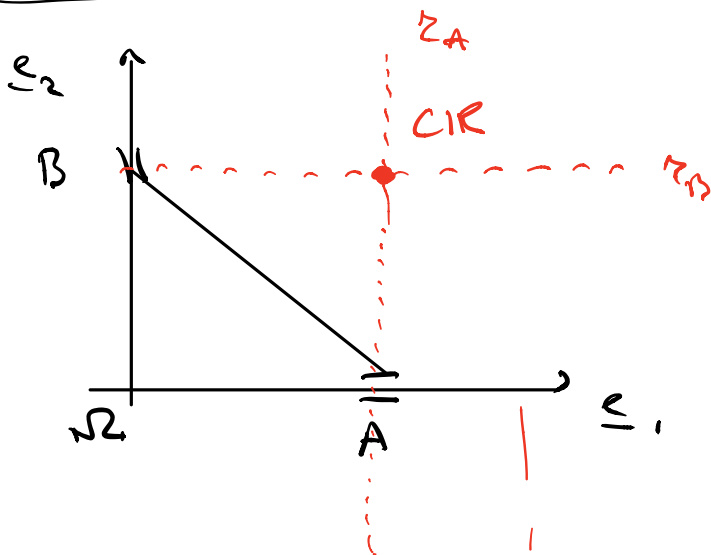
↑ Poisson con $C=0$

$$= \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$$

2) (Teorema di Charles)

$\forall P \in R \quad \underline{v}_P$ è ortogonale a $(\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

Esempio:



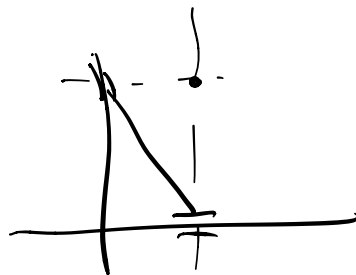
C.I.R. $\in z_A$
C.I.R. $\in z_B$

• $\underline{v}_A$ è diretto lungo e_1 (per il vincolo)
 $(\underline{x}_A - \underline{x}_C)$ è ortogonale a $\underline{v}_A$

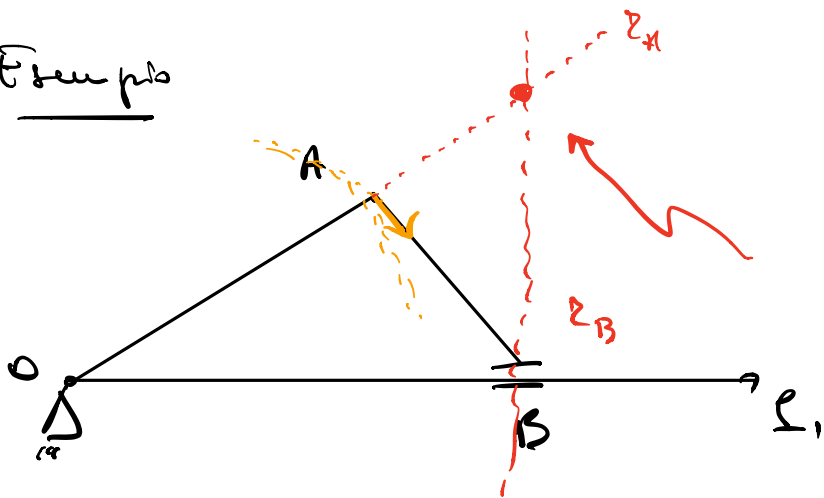
C.I.R. $\in z_A$

• $\underline{v}_B \rightarrow e_2$ ($\underline{x}_B - \underline{x}_C$)
ortogonale a e_2

C.I.R. $\in z_B$



Esempio



CIR AD

asse 1 OA $\rightarrow$ CIR asse 1 $\equiv 0$

asse 2 AD : B $\underline{v}_B$ lungo l_1
CIR $\in z_B$

A

$\underline{v}_A$

CIR $\in z_A$

Spostamenti virtuali

$$\underline{v}_p = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_c)$$

$C = CIR$

$$\delta \underline{x}_p = \frac{d \underline{x}_p}{d \tau} d\tau = \underline{v}_p d\tau = \underline{\omega} d\tau \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_c)$$

$\underline{\omega} = ?$

poniamo

$$\underline{\omega} d\tau = \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau \underline{e}_3$$

$$= \delta \varphi \underline{e}_3$$

Tutto insieme : $\delta \underline{x}_p = \delta \varphi \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_c)$

spostamenti virtuali di un rigido piano
 si ottengono pensando al CR come
 ad un punto del rigido, intorno al
 quale il rigido ruota di un angolo $\delta\varphi$

Commenti:

1. la direzione di δx_p ($\rightarrow v_p$) è
 ortogonale a $\overline{PC}$

2. verso di δx_p

$\delta\varphi > 0$ antiorario
 $\delta\varphi < 0$ orario

3. $\delta x_p = \delta\varphi \varepsilon_s \wedge (x_p - x_c)$

$$\Rightarrow \|\delta x_p\| = |\delta\varphi| \|x_p - x_c\|$$

Allora, dati due punti qualsiasi P e Q

$$\|\delta x_p\| = |\delta\varphi| \|x_p - x_c\|$$

$$\|\delta x_q\| = |\delta\varphi| \|x_q - x_c\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x_p\|}{\|x_p - x_c\|} = |\delta\varphi| = \frac{\|\delta x_q\|}{\|x_q - x_c\|}$$