

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 13 MARZO 2020

- PRIMA PARTE

CAMPI DI FORZA

FORZE CONSERVATIVE

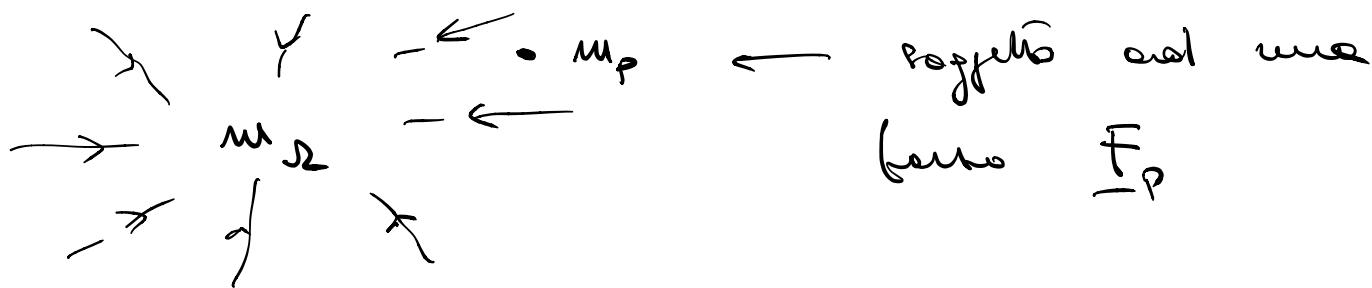
Fisica $\rightarrow$ concetto di forza

forze dipendono dal punto, dal tempo
o dalle velocità

Esempi

1. forza viscosa $\underline{F} = -\lambda \underline{v}$
2. forza Lorentz $\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \wedge \underline{B}$
3. forza elastica $\underline{F} = -c (\underline{x} - \underline{x}_0)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
4. forza gravitazionale
 $\underline{F}_p = -\gamma \frac{m_p m_R}{\|\underline{x}_p - \underline{x}_R\|^2} \text{vers}(\underline{x}_p - \underline{x}_R)$
 $\uparrow$

Campo di forze



campo di forze

Ragionamenti simili: campo elettrico,
o magnetico ---

Legge che ad ogni punto associa il vettore
forza

Per noi: forze posizionali $\rightarrow$ dipendono
solo dalla posizione

Di particolare importanza sono le forze
conservative $\rightarrow$ l'energia meccanica

Totale si conserva.

Prendiamo $\underline{F}$ posizionale, agisce su
un punto P , posizione $\underline{x} \rightarrow F$ è conservativa
se il lavoro per andare da $\underline{x}_0$ a $\underline{x}$,

non dipende dalla traiettoria

Definizione F è conservativa se esiste una funzione $V(\underline{x})$, tale che il lavoro di $\underline{F}$ per andare da $\underline{x}_0$ a $\underline{x}_1$ è dato da $-(V(\underline{x}_1) - V(\underline{x}_0))$

Consideriamo

$$\underline{x}_0 = \underline{x}_E$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_E + \delta \underline{x}$$

configurazione di equilibrio
spostamento virtuale

$$\underline{F} \text{ conservativa} \rightarrow L V = - [V(\underline{x}_E + \delta \underline{x}) - V(\underline{x}_E)]$$

$$\underline{x}_E \text{ equilibrio : } L V \begin{matrix} \leq 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \forall \delta \underline{x} \text{ invertibile}$$

Se V è regolare

$$L V = - \nabla V \Big|_{\underline{x}_E} \cdot \delta \underline{x}_E = - dV$$

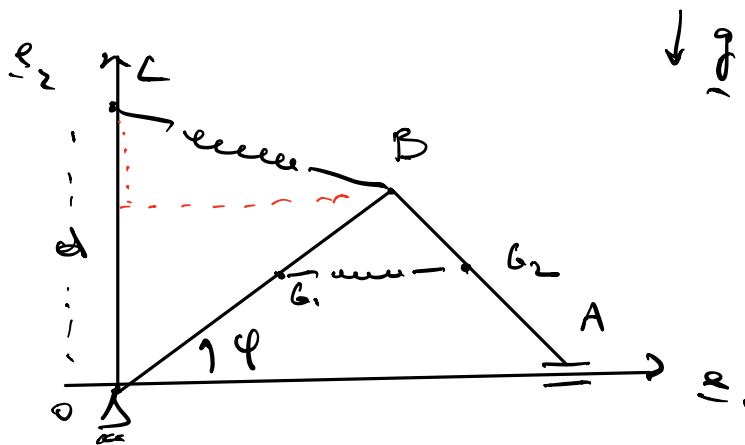
differenziale
di V

↑
punto di
di V di stazionarietà
($\nabla V \Big|_{\underline{x}_E} = 0$)

Noi osserveremo sempre V sia regolare
e che gli spostamenti virtuali siano
invertibili.

Equilibrio di sistemi dinamici ad 1 grado
di libertà soggetti a forze conservative

Esempio



$\downarrow \underline{g}$

$$\overline{CB} = \overline{AB} = L$$

omogenee
 m e M

$$\overline{CA} = d$$

→ Tutte le forze
sono conservative

$$L V = - dV$$

Peso : $V_1 = - m \underline{g} \cdot \underline{x}_{G_1} - M \underline{g} \cdot \underline{x}_{G_2}$ ←

$$L V = m \underline{g} \cdot d \underline{x}_{G_1} + M \underline{g} \cdot d \underline{x}_{G_2} \stackrel{!}{=} - dV$$

Molle

in B →

$$V_2 = \frac{c}{2} \| \underline{x}_B - \underline{x}_C \|^2 \leftarrow$$

$$LV = -c(x_B - x_C) \cdot \delta x_B$$

$$= -c(\underline{x_B - x_C}) \cdot \delta(\underline{x_B - x_C})$$

$$= -dV_2 \quad \uparrow \delta x_C = 0$$

in G_1 & G_2 $V_3 = \frac{c}{2} \|x_{G_1} - x_{G_2}\|^2$

$$LV = -c(x_{G_1} - x_{G_2}) \cdot \delta x_{G_1} + c(x_{G_1} - x_{G_2}) \cdot \delta x_{G_2}$$

$$= -c(x_{G_1} - x_{G_2}) \cdot \delta(x_{G_1} - x_{G_2})$$

$$= -dV_3$$

Potenziale $V = \underset{\uparrow}{U_1} + \underset{\uparrow}{U_2} + \underset{\uparrow}{U_3}$

$$LV = -dV$$

V : però nel nostro formalismo vogliamo esprimere tutto la funzione di φ

$$V = mg y_{G_1} + Mg y_{G_2} + \frac{c}{2} \left[x_B^2 + (y_B - d)^2 \right] +$$

$$\left\{ \left[(x_B \underline{e}_1 + y_B \underline{e}_2) - (d \underline{e}_2) \right]^2 = x_B^2 + (y_B - d)^2 \right\}$$

$$+ \frac{c}{2} (x_{G_1} - x_{G_2})^2$$

$$= (m+M)g \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} \left[L^2 \cos^2 \varphi + (L \sin \varphi - d)^2 \right] + \frac{c}{2} L^2 \cos^2 \varphi$$

$$= \left[(m+M)g \frac{L}{2} - c L d \right] \sin \varphi + c \frac{L^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{c}{2} \left[L^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_{=1}) + d^2 \right]$$

$$= V(\varphi)$$

Configurazioni di equilibrio $\rightarrow$ punti
di stazionarietà di V

Studiamo equilibrio e stabilità

$$\frac{d}{d\varphi} V(\varphi) = \left[(m+M)g \frac{L}{2} - c L d \right] \cos \varphi - c L^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$= c L^2 \left\{ \frac{1}{c L} \left[(m+M)g \frac{L}{2} - c d \right] - \sin \varphi \right\} \cos \varphi$$

$$= c L^2 (\gamma - \sin \varphi) \cos \varphi$$

$$\gamma := \frac{1}{c L} \left[(m+M)g \frac{L}{2} - c d \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ competizione tra le forze
peso ed elastiche

Due cori $\frac{d}{d\varphi} V(\varphi) = cL^2 (\gamma - \sin\varphi) \cos\varphi$

1) Se $|\gamma| > 1 \Rightarrow (\gamma - \sin\varphi) \neq 0$

$\frac{dV}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \quad -\pi < \varphi < \pi$

due configurazioni di equilibrio

$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

2) Se $|\gamma| < 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = 0 \leftarrow \\ \sin\varphi = \gamma \end{array} \right.$

4 config.
di equilibrio

$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2$

$\sin\varphi_1 = \gamma \quad \sin\varphi_2 = \gamma$

Stabilità : dall'analisi sappiamo che
dobbiamo studiare la derivata seconda

$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = cL^2 \left[-\sin\varphi (\gamma - \sin\varphi) - \cos^2\varphi \right]$

1) Caso $|\gamma| > 1$
 $V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -cL^2(\gamma - 1) = cL^2(1 - \gamma)$
 $V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cL^2(1 + \gamma)$

Stabilità

Se $\gamma > 1$

$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{INSTABILE}$

$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{STABILE}$

$$\text{se } \gamma < 1 \quad V''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ STABILE}$$

$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ INSTABILE}$$

2) Caso 2 $|\gamma| < 1$

$$\text{4 eq. } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2$$

Quindi

$$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = cL^2(1-\gamma) > 0 \quad \text{STABILE}$$

$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cL^2(1+\gamma) > 0 \quad \text{STABILE}$$

$$\begin{aligned} V''(\varphi_1) &= cL^2 \left[-\sin \varphi_1 (\gamma - \sin \varphi_1) - \cos^2 \varphi_1 \right] \\ &= -cL^2 \cos^2 \varphi_1 < 0 \quad \text{INSTABILE} \end{aligned}$$

$$V''(\varphi_2) = -cL^2 \cos^2 \varphi_2 < 0 \quad \text{INSTABILE}$$

Per riassumere

$\gamma < -1$		$-1 < \gamma < 1$		$\gamma > 1$	
$\frac{\pi}{2}$	stabile	$\frac{\pi}{2}$	stabile	$\frac{\pi}{2}$	instabile
$-\frac{\pi}{2}$	instabile	$-\frac{\pi}{2}$	stabile	$-\frac{\pi}{2}$	stabile
		φ_1	instabile		
		φ_2	instabile		

Stabilità dipende dal parametro f
e parametro di trascinamento

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 13 MARZO 2020

- SECONDA PARTE

Denotiamo con q lo coordinato libero

$$V = V(q) \rightarrow L V = - dV = - \frac{dV}{dq} dq$$

$$L V = Q dq$$

↑ forza generalizzata

$$\Rightarrow Q = - \frac{dV}{dq}$$

PLV $\rightarrow Q = 0$ all'equilibrio

$$\Rightarrow \text{all'equilibrio } - \frac{dV}{dq} = 0$$

Problema a l gradi di libertà

$$\underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$$

Potenziale $V = V(q_1, \dots, q_l)$ assumiamo regolare

$$LV = -dV = - \left[\frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_l} \delta q_l \right]$$

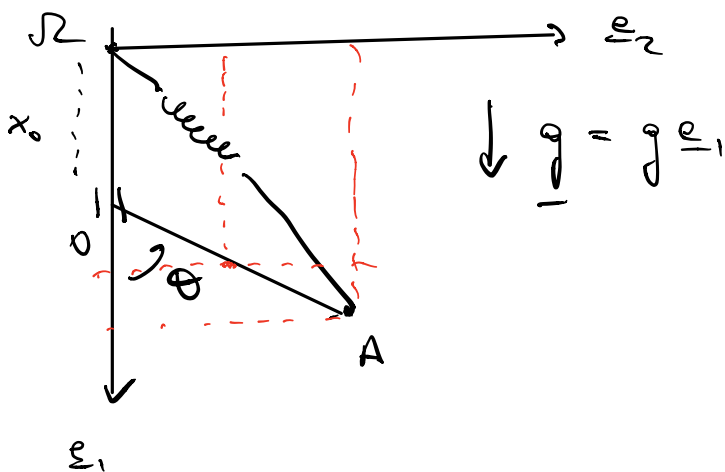
$$LV = Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_l \delta q_l$$

$$\boxed{Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}}$$

In particolare all'equilibrio

$$- \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l$$

Esempio



due gradi di
libertà (x_0, θ)

OA omogenea $OA = L$

$$V = -mg \cdot \underline{x}_G + \frac{c}{2} \|\underline{x}_A\|^2$$

esprimiamo il potenziale in termini delle
coordinate libere

$$V = -mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta + x_0 \right) + \frac{c}{2} \left[(x_0 + L \cos \theta)^2 + L^2 \sin^2 \theta \right]$$

$$= -mg \frac{L}{2} \cos \theta - mg x_0 + \frac{c}{2} (x_0^2 + 2L x_0 \cos \theta) + \frac{c}{2} L^2$$

Forse generalizzare

$$-Q_{x_0} = \frac{\partial V}{\partial x_0} = -mg + cx_0 + cL \cos\theta = -R \cdot \varepsilon,$$

$$-Q_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \left(\frac{mg}{2} - cx_0 \right) L \sin\theta = -H(0) \cdot \varepsilon_s$$

Configurazioni di equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{x_0} = 0 \Rightarrow -mg + cx_0 + cL \cos\theta = 0 \\ Q_\theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{mg}{2} - cx_0 \right) L \sin\theta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{x_0} = 0 \Rightarrow -mg + cx_0 + cL \cos\theta = 0 \\ Q_\theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{mg}{2} - cx_0 \right) L \sin\theta = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \sin\theta = 0 \\ \downarrow \\ x_0 = \frac{mg}{2c} \end{array}$$

$$\bullet \text{ se } \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos\theta = 1 \\ \cos\theta = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{mg}{c} - L \\ x_0 = \frac{mg}{c} + L \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ se } x_0 = \frac{mg}{2c} \Rightarrow \cos\theta = \frac{mg}{2cL}$$

$$\text{se } \frac{mg}{2cL} < 1$$

Quindi : 2 cori

$$\text{— se } \frac{mg}{2cL} > 1 \Rightarrow 2 \text{ configurazioni di eq.}$$

$$\underline{q}_1 = \left(x_0 = \frac{mg}{c} - L, \theta = 0 \right)$$

$$\underline{q}_2 = \left(x_0 = \frac{mg}{c} + L, \theta = \pi \right)$$

— se $\frac{mg}{2cL} < 1 \Rightarrow 4$ configurazioni di eq.

$\underline{q}_1, \underline{q}_2$ di cui sopra

$$\underline{q}_3 = \left(x_0 = \frac{mg}{2c}, \theta_1 = \arccos \frac{mg}{2cL} \right)$$

$$\underline{q}_4 = \left(x_0 = \frac{mg}{2c}, \theta_2 = -\arccos \frac{mg}{2cL} = -\theta_1 \right)$$

Stabilità delle configurazioni di equilibrio

→ guardiamo l' Hessiana

$$\text{Hess } V := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -cL \sin \theta \\ -cL \sin \theta & \left(\frac{mg}{2} - cx_0 \right) L \cos \theta \end{pmatrix}$$

anchini :
def positiva $\rightarrow$ min locale
def negativa $\rightarrow$ max locale

Criterio di Sylvester : matrice simmetrica
e def positiva $\Leftrightarrow$ Tutti i minori principali

sono positivi

(Principi di $(\frac{d}{dt})$)

matrice 2×2 : $c > 0$

determinante

$$\det H_{VV} = c \left(\frac{mg}{2} - cL \right) L \cos \theta - c^2 L^2 \sin^2 \theta$$

Abbiamo i casi:

• in q_1 : $\det H_{VV} = cL \left(cL - \frac{mg}{2} \right) > 0$

q_1 è stabile solo
per $\frac{mg}{2cL} < 1$

$\frac{mg}{2cL} < 1$

• in q_2 : $\det H_{VV} = cL \left(cL + \frac{mg}{2} \right) > 0$ sempre

$\Rightarrow q_2$ è sempre stabile

• in q_3 e q_4

$$\det H_{VV} = -c^2 L^2 \sin^2 \theta < 0$$

↑

q_3 e q_4 sono instabili