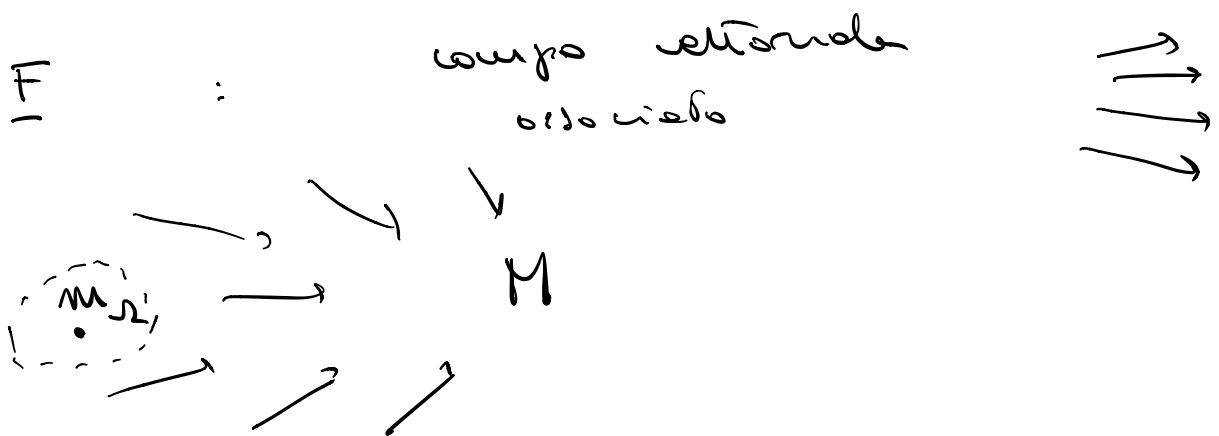


MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 17 MARZO 2020

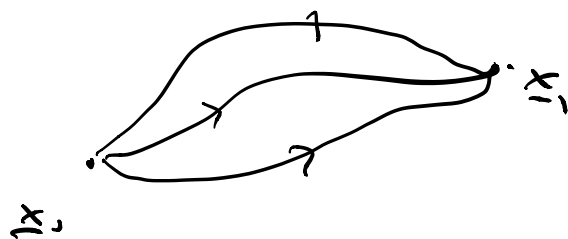
- PRIMA PARTE

Forze conservative & campi di forze



→ forze conservative : dipendono solamente dalla posizione

Forze conservative : $V(x)$ Tale che
il lavoro di F per spostare un oggetto
da x_0 a x_1



è dato - $(V(x_1) - V(x_0))$

PLV $\longrightarrow$

$\underline{x}_E$ di equilibrio

$$\underline{x}_E \rightarrow \underline{x}_E + \delta \underline{x}$$

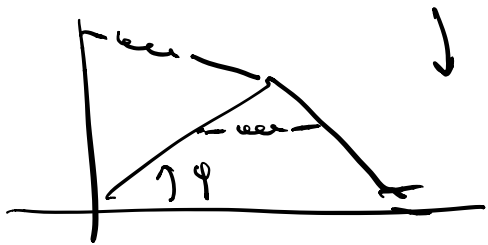
$$LV = - \left[V(\underline{x}_E + \delta \underline{x}) - V(\underline{x}_E) \right]$$

$$LV = - \left. \nabla V \right|_{\underline{x}_E} \cdot \delta \underline{x}_E = - dV = 0$$

$\downarrow$
punto di stazionarietà

$\underline{x}_E$ è stabile se abbiamo un minimo proprio di V .

Abbiamo visto un esempio



$\downarrow$ $\underline{\phi}$

$$LV = - dV$$

stabile V

$\rightarrow$ configurazioni di equilibrio $\frac{dV}{d\varphi} = 0$

$\rightarrow$ stabilità delle configurazioni

di equilibrio : segno $\left. \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{eq}$

1 grado di libertà $\Rightarrow$ sistemi con 1
grado di libertà $q = (q_1, \dots, q_l)$

$$L V = -dV = - \left[\frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_l} \delta q_l \right]$$

$$V = V(q_1, \dots, q_l)$$

$$= Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_l \delta q_l$$

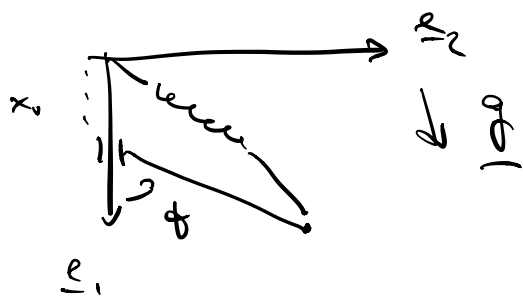
$\uparrow$ forze generalizzate

$$\Rightarrow Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

all'equilibrio

$$Q_i = 0 = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Esempio



$\rightarrow$ 2 coordinate libere

$$V = V(x_0, \theta)$$

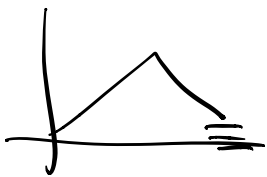
Config. di equilibrio :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

stable for $\rightarrow$ matrix Hessian di V

$$\text{Hess } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}$$

primo esempio



$$V : \frac{d}{d\varphi} V = c L^2 (\gamma - \sin \varphi) \cos \varphi$$

$$\text{1}^{\circ} \text{ eq : } \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad \# \text{ sol dipende da } \gamma$$

$$\underbrace{(\gamma - \sin \varphi)}_0 \cdot \underbrace{\cos \varphi}_0 = 0$$

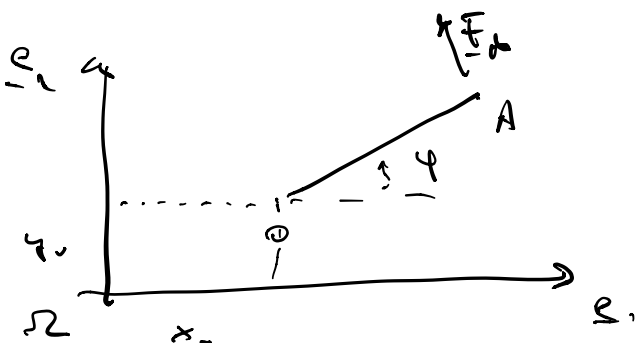
$$\& \quad |\gamma| > 1 \rightarrow 2 \text{ sol}$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\& \quad |\gamma| < 1 \quad \text{proprietà} \quad \sin \varphi = \gamma \rightarrow \text{altri soluzioni}$$

Generalizzazione



Spontaneamente

$$x_0 = x_0(\tau)$$

$$y_0 = y_0(\tau)$$

$$\varphi_0 = \varphi_0(\tau)$$

τ parametrizza gli spostamenti

$$\tau \in [\tau_0, \tau_1]$$

$$\text{Lavoro da } \tau_0 \text{ a } \tau_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A d\tau$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau) d\tau$$

↑
potenza

espresso in
termini delle
coordinate libere

Più in generale, $\underline{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$

→ definire il moto

$$\underline{q}(\tau) = (q_1(\tau), \dots, q_\ell(\tau)) \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]$$

↑

$$\rightarrow \underline{x}_A(\tau) = \underline{x}_A(q_1(\tau), \dots, q_\ell(\tau))$$

calcoliamo la velocità

$$\rightarrow \underline{v}_A = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_A(\tau) = \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell$$

↑
 $\frac{dq_1}{d\tau}$

→ calcoliamo $W(\tau)$

(supponiamo di avere $\underline{F}_A$)

$$W(\tau) = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A = \underbrace{\underline{F}_A}_{Q_1} \cdot \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \underbrace{\underline{F}_A}_{Q_\ell} \cdot \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell$$

$$W(\tau) = Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_\ell \dot{q}_\ell \quad \text{"forma differenziale"}$$

• lavoro

$$L = \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_\ell \dot{q}_\ell) d\tau$$

Allora:

il lavoro dipende solo dalle due confg in τ_0 e τ_1 = $\exists$ una funzione $V(q_1, \dots, q_\ell)$ tale che $Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$ $i=1, \dots, \ell$

(la forma differenziale $W(\tau)$ è "esatta")

Analisi: condizione necessaria che deve essere soddisfatta affinché una forma

di differenziale sia esatta

CONDIZIONI

D1

COMPATIBILITA'

:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \\ i, j = 1, \dots, l \end{array} \right.$$

$i, j = 1, \dots, l$

(forma differenziale chiusa)

In fatti: se $Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, l$

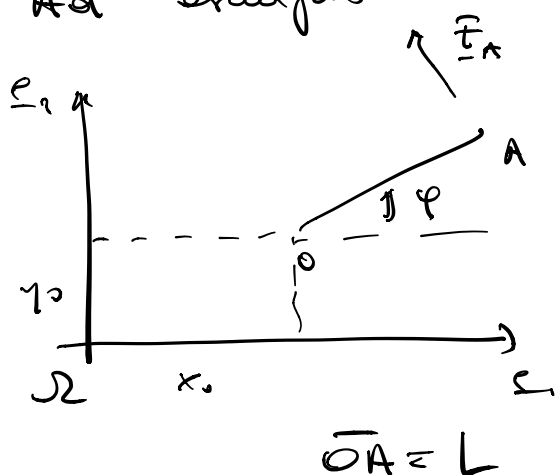
allora

$$\frac{\partial}{\partial q_j} Q_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(- \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(- \frac{\partial V}{\partial q_j} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j$$

necessaria, ma non sufficiente!

Ad esempio



$$\vec{F}_A = -F \sin \varphi \underline{e}_1 + F \cos \varphi \underline{e}_2$$

$$M(O) = L F \underline{e}_3 \quad \leftarrow \text{verificare}$$

Sistema di forze $\rightarrow$ forze generalizzate

$$Q \leftarrow \underline{R}, \underline{H}$$

↑
vincolo

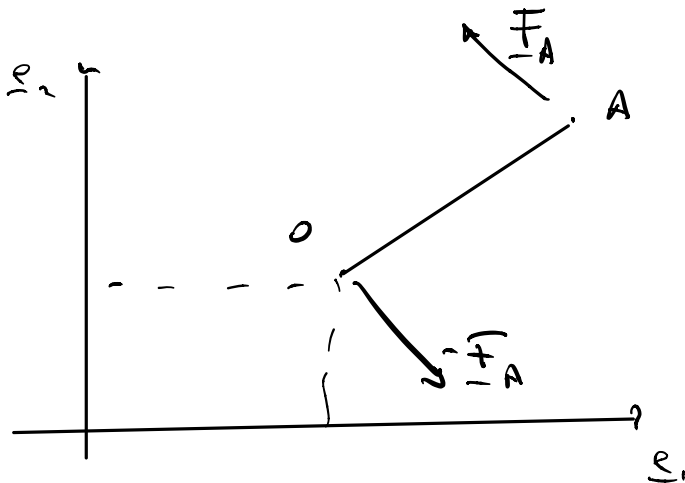
↖ momento

$$\Rightarrow Q_{x_0} = -F \sin \varphi, \quad Q_{y_0} = F \cos \varphi, \quad Q_\varphi = FL$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \rightarrow \frac{\partial Q_{x_0}}{\partial \varphi} = -F \cos \varphi$$

$$\frac{\partial Q_\varphi}{\partial x_0} = 0$$

$\rightarrow$ non è conservativa



$$\underline{F}_O = -\underline{F}_A$$

$$\underline{R} = \underline{0} = (\underline{F}_A - \underline{F}_A)$$

$$\underline{H}(0) = FL \underline{e}_3$$

$$Q_{x_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_1 = 0$$

$$Q_{y_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2 = 0$$

$$Q_\varphi = \underline{H}(0) \cdot \underline{e}_3 = FL$$

$$\text{— } L V = F L \delta q = d (F L q)$$

anche n singolarmente $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ non sono conservative, la coppia da un lavoro che può essere ottenuto come il differenziale di una funzione

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 17 MARZO 2020

— SECONDA PARTE

Caso notevole : sistemi ad un solo grado di libertà, soggetti solo a forze conservative

$$L V = Q(q) \delta q = d (-V)$$

↑
funzioni
regolari

$$V = - \int Q$$

una
primitiva
di Q

Se abbiamo una sola variabile, ci basta cercare una primitiva

Se abbiamo più variabili, non è risolvibile in generale

Nell'esempio

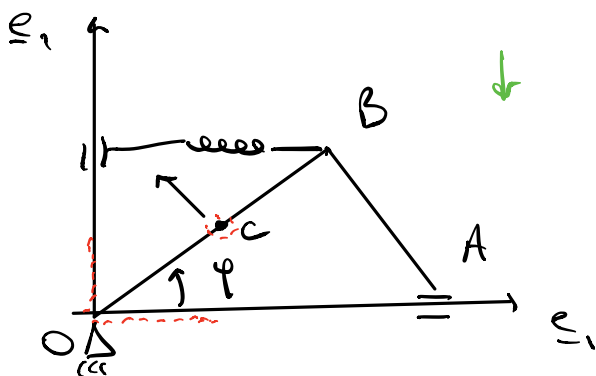
$$- Q_{x_0} = F \sin \varphi \quad = \frac{\partial V}{\partial x_0}$$

$$- Q_{y_0} = -F \cos \varphi \quad \text{J? } V \text{ d.c.} \quad = \frac{\partial V}{\partial y_0}$$

$$- Q_{\varphi} = -FL \quad = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

→ no, non esiste V

Esercizio



$$\underline{g} \rightarrow \underline{e}_2$$

$$\downarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{se forse} \\ \underline{g} \rightarrow \underline{e}_2 \end{array} \right]$$

piano orizzontale

$$\overline{OB} = \overline{BA} = L$$

$$\overline{OC} = \frac{L}{2}$$

$$\|\underline{F}_c\| = \bar{F}$$

Calcolare l'energia potenziale e discutere l'equilibrio

$$V_{minimo} = \frac{c}{2} x_0^2 = \frac{c}{2} (L \cos \varphi)^2$$

$$LV \text{ per } \underline{F}_c \quad \underline{F}_c \cdot \delta \underline{x}_c =$$

$$= \left(F \cos \varphi \underline{e}_2 - F \sin \varphi \underline{e}_1 \right) \cdot \left(\frac{L}{2} \underline{(-\sin \varphi)} \delta \varphi \underline{e}_1 + \frac{L}{2} \underline{\cos \varphi} \delta \varphi \underline{e}_2 \right) =$$

$$\left[\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = 1, \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 = 0 \right]$$

$$= \frac{FL}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \delta \varphi = \frac{FL}{2} \delta \varphi$$

$$\dot{=} - \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi$$

$$V = - \frac{FL}{2} \varphi$$

Tutto insieme $V(\varphi) = - \frac{FL}{2} \varphi + \frac{c}{2} L^2 \cos^2 \varphi$

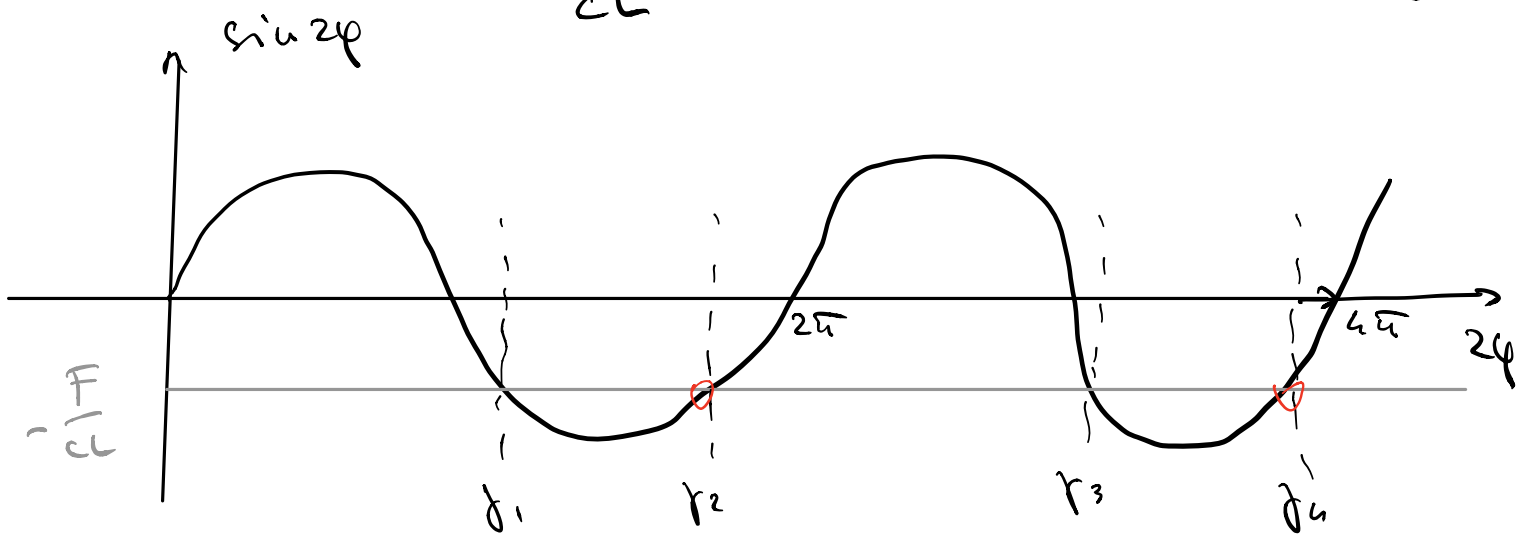
Condizione di equilibrio

$$- Q = \frac{dV}{d\varphi} = - \frac{FL}{2} - cL^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$= - \frac{L}{2} (F + cL \sin 2\varphi) = 0$$

Quindi: se $\frac{F}{cL} \geq 1$ non c'è equilibrio

Se invece $0 \leq \frac{F}{cL} < 1 \Rightarrow \sin 2\varphi = -\frac{F}{cL}$



$(0 < \varphi < \pi \Rightarrow 0 < 2\varphi < 4\pi)$

4 configurazioni di equilibrio per φ

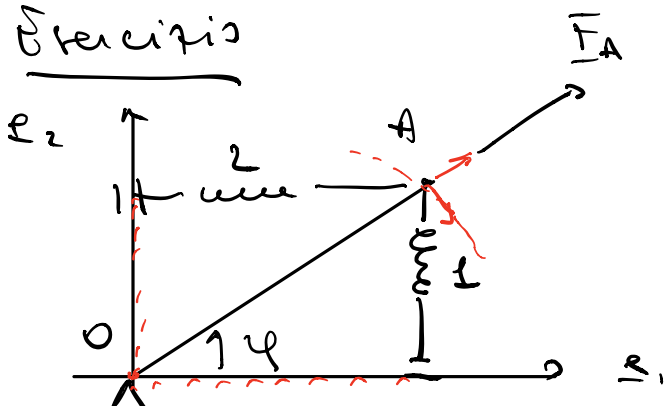
$\varphi = \frac{\varphi_1}{2}, \frac{\varphi_2}{2}, \frac{\varphi_3}{2}, \frac{\varphi_4}{2}$

Stabilità: $V''(\varphi) = -c(L^2 \cos 2\varphi)$

$V''\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) = V''\left(\frac{\varphi_4}{2}\right) < 0 \Rightarrow \varphi_2, \varphi_4$ instabile
($\cos 2\varphi > 0$)

$V''\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) = V''\left(\frac{\varphi_3}{2}\right) > 0 \Rightarrow \varphi_1, \varphi_3$ stabili
($\cos 2\varphi < 0$)

Esercizio



Più opportuno

$\|F_A\| = F$

molla 1 $\rightarrow c$

molla 2 $\rightarrow 2c$

Calcolare l'energia potenziale e discutere l'equilibrio.

Le considerazioni fatte in cinematica

→ LV di $\underline{F}_A \approx 0 \rightarrow V$ costante

per F_A , $V \approx 0$

Forze elastiche

$$V = \frac{c}{2} y_A^2 + \frac{2c}{2} x_A^2 = \frac{c}{2} L^2 \sin^2 \varphi + c L^2 \cos^2 \varphi$$

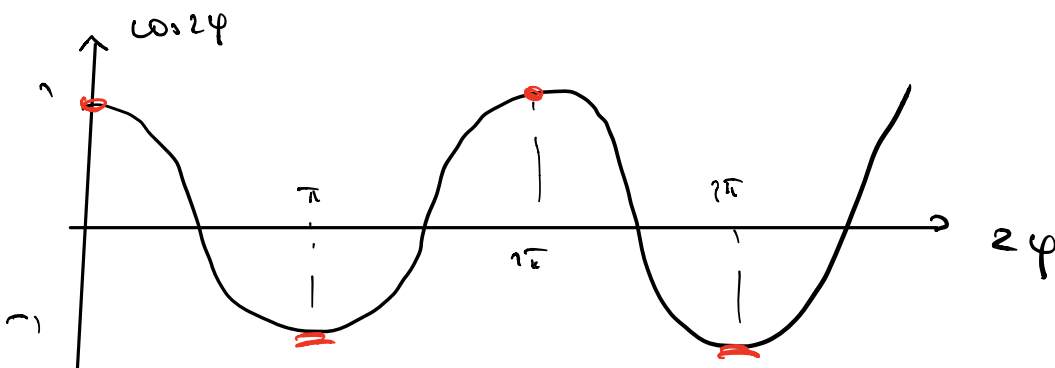
$$= \frac{c}{2} L^2 (1 - \cos^2 \varphi) + c L^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= \frac{c}{2} L^2 \cos^2 \varphi + \frac{c}{2} L^2 =$$

$$= \frac{c}{2} L^2 \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} + \frac{c L^2}{2} =$$

$$= \frac{c L^2}{4} \cos 2\varphi + \frac{3}{4} c L^2$$

Se $0 \leq \varphi < 2\pi \rightarrow 0 \leq 2\varphi < 4\pi$



$\varphi = 0$ max
 $\varphi = \pi$ min
 → instabili

$\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$
 min per V
 → stabili

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 17 MARZO 2020

- TERZA PARTE

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

S sistema materiale in equilibrio

$$\rightarrow \underline{F}_P = \underline{0} \quad \forall P \in S$$

↑ forza totale agente sul punto $P \in S$
(nel sistema Σ)

$$\underline{F}_P = \underline{0} \quad \forall P \in S \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{P \in S} \underline{F}_P = \underline{0} \right) \quad \leftarrow$$

$$O \text{ pto fisso}, \quad \underline{M}(O) = \sum_{P \in S} (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P = \underline{0}$$

Dividiamo le forze in:

forze interne	forze esterne
---------------	---------------

Principio di azione e reazione: le forze interne

sono a due a due coppie di bracci
nulli

Allora:

$$\rightarrow \cdot \underline{R}^{(i)} = \sum_{p \in S} \underline{F}_p^{(i)} = \underline{0} \quad \text{risultante delle forze interne}$$

$$\rightarrow \cdot \underline{M}^{(i)}(O) = \underline{0} \quad \text{momento risultante delle forze interne, rispetto ad un polo O arbitrario}$$

Allora per le forze esterne:

S è
in equilibrio

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(e)}(O) = \underline{0} \end{array} \right.$$

EQUAZIONI
CARDINALI
DELLA
STATICA
(ECS)

condition
necessaria

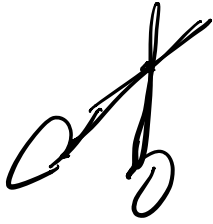
Se un sistema è in equilibrio, allora la
risultante ed il momento risultante
delle forze esterne sono nulle

ECS: equazioni di bilancio

In generale $\underline{R}^e = \underline{0}$, $\underline{M}^e(O) = \underline{0}$ ~~$\Rightarrow$~~ $\underline{F}_p = \underline{0} \quad \forall p$

→ ECS non sono sufficienti

Ad esempio: forbici



→ esercitiamo una coppia di braccio nullo

(→ forza esterna soddisfa ECS) → le forbici si aprono

→ corpo rigido

Per un corpo rigido $\Rightarrow ECS = PLV$

$$\begin{aligned} LV \text{ rigido} & \stackrel{\text{espr. 3}}{=} \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}(0) \cdot \underline{\chi} \\ & = \underline{R}^{(e)} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}^{(e)}(0) \cdot \underline{\chi} \end{aligned}$$

siccome

$$\begin{cases} \underline{R}^{(i)} = 0 \\ \underline{M}^{(i)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } LV = 0 \quad \forall \delta \underline{x}_0, \underline{\chi} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{R}^{(e)} = 0 \\ \underline{M}^{(e)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{e } \begin{cases} \underline{R}^{(e)} = 0 \\ \underline{M}^{(e)}(0) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad LV = 0 \quad \forall \delta \underline{x}_0, \underline{\chi}$$

Nota: e $\underline{M}^{(e)}(0) = 0$ verificato per 0,

allora $\underline{R}^{(e)} = 0 \Rightarrow$ e verificato per 0'

Infatti: $\underline{M}^e(\underline{O}) = \sum_P (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P^e =$

$$= \sum_P \left([\underline{x}_P - \underline{x}_O] + [\underline{x}_O - \underline{x}_{O'}] \right) \wedge \underline{F}_P^e$$

$$= \sum_P (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P^e + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \sum_P \underline{F}_P^e$$

indipendenti da P

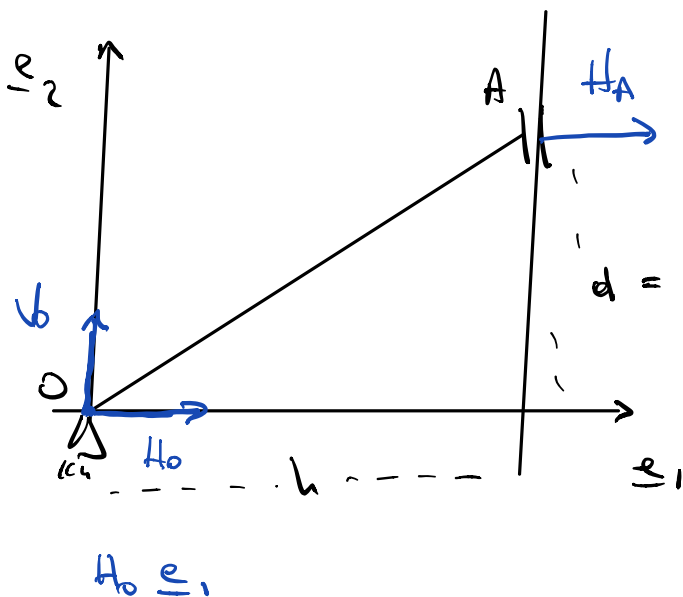
$$= \underline{M}^e(O') + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \underline{R}^e$$

$$\underline{R}^e = \underline{0} \Rightarrow \underline{M}^e(\underline{O}) = \underline{M}^e(\underline{O}')$$

Applicazioni alla statica

Se un rigido è vincolato: mettiamo in
bilancio le forze di reazione
→ usare le ECS per calcolare le reazioni

vincoli



$$\overline{OA} = L$$

$\underline{R}^{e,e}$ forze esterne attive
 $\underline{M}^{e,e}$ momenti forze esterne attive

$$\underline{R}^e = \underline{0}$$

lungo $\underline{e}_1$: $H_0 + H_A + \underline{R}^{e,e} \cdot \underline{e}_1 = 0$

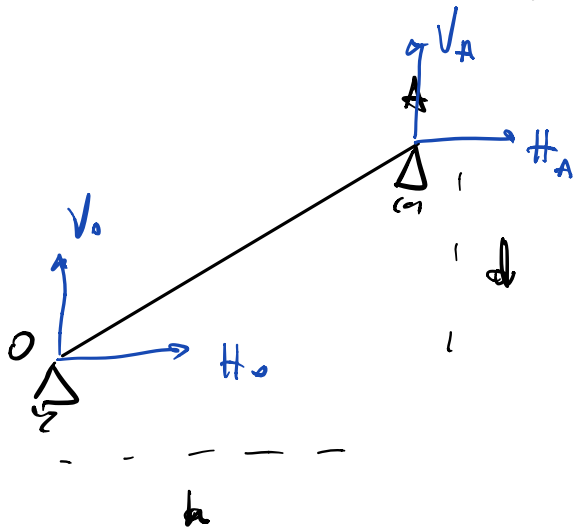
lungo $\underline{e}_2$: $V_0 + \underline{R}^{e,e} \cdot \underline{e}_2 = 0$

$$\underline{M}^e(0) = \underline{0} \Rightarrow \underline{e}_3 : -H_A d + \underline{M}^e(0) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

• $d \neq 0$: H_0, V_0, H_A sono determinate
e termini delle forze attive

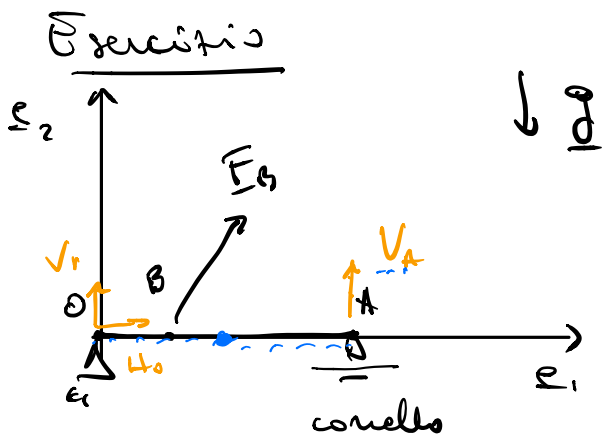
• $d = 0$ l'ultima eq: $\underline{M}^e(0) \cdot \underline{e}_3 = 0$
indef da H_A

→ in generale no soluzione



$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 + H_A + \underline{R}^e \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ V_0 + V_A + \underline{R}^e \cdot \underline{e}_2 = 0 \\ -H_A d + V_A h + \underline{M}^e(0) \cdot \underline{e}_3 = 0 \end{array} \right.$$

→ staticamente indeterminato



$$\underline{F}_B = f \underline{e}_1 + 2f \underline{e}_2$$

piano verticale

$$\overline{OA} = l, \quad \overline{OB} = \frac{l}{4}$$

Calcolare le reazioni delle vincoli in O & A

$$\underline{R}^e = \underline{0} \quad \text{lungo } \underline{e}_1 \quad H_0 + f = 0$$

$$\text{lungo } \underline{x_2} \quad V_0 + V_A - Mg + 2f = 0$$

$$\underline{M^e(0)} = \underline{0} \quad l V_A - Mg \frac{l}{2} + 2f \frac{l}{4} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A = \frac{Mg}{2} - \frac{f}{2} \\ V_0 = Mg - 2f - V_A = \frac{Mg}{2} - \frac{3}{2}f \\ H_0 = -f \end{array} \right.$$