

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 18 MARZO 2020

- PRIMA PARTE

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

S sistema materiale : all'equilibrio

Condizione di equilibrio

$$\underline{F}_P = 0 \quad \text{forza totale su } P$$

$$\forall P \in S$$

$$\rightarrow \underline{R} = \sum_P \underline{F}_P = \underline{0}$$

$$\underline{M(O)} = \sum_P (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P = \underline{0}$$

Separato le forze in : esterne & interne

Forze interne : azione & reazione implica

che le forze interne sono a due a due

coppie di braccio nullo

$$\underline{R}^i = \sum_{P \in S} \underline{F}^{(i)} = \underline{0}$$

$$\underline{M}^i(O) = \underline{0}$$

Troviamo delle equazioni di bilancio per le forze esterne

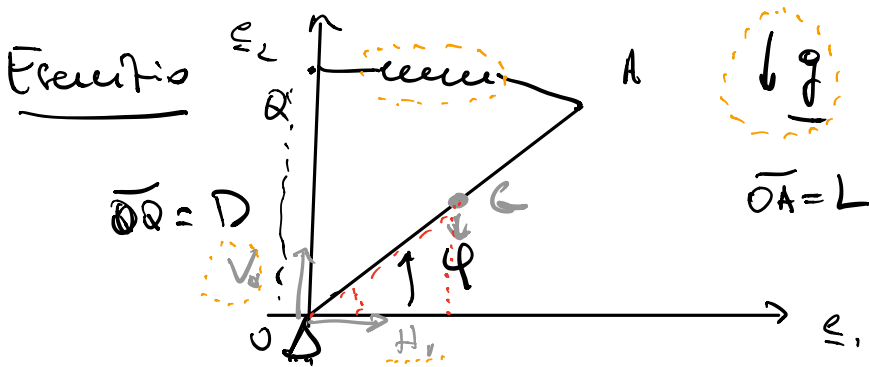
$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(e)}(O) = \underline{0} \end{cases}$$

EQUAZIONI
CARDINALI
DELLA STATICA

In generale sono condizioni necessarie all'equilibrio.

Caso di un corpo rigido : anche sufficienti (equivalenti al P.L.V.)

Permettono di determinare le reazioni vincolari



piano verticale
Determinare

- config di eq.
- reazioni in O all'equilibrio

- PLV per forze conservative

$$V = m g y_G + \frac{c}{2} \| \underline{x}_A - \underline{x}_Q \|^2$$

$$= m g \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} \| L \cos \varphi \underline{e}_1 + L \sin \varphi \underline{e}_2 - D \underline{e}_2 \|^2$$

$$= m g \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} \| L \cos \varphi \underline{e}_1 + (L \sin \varphi - D) \underline{e}_2 \|^2$$

$$= m g \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} (\underbrace{L^2 \cos^2 \varphi}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{L^2 \sin^2 \varphi}_{\dots\dots\dots} + D^2 + \underbrace{- 2DL \sin \varphi}_{\dots\dots\dots})$$

$$= \underbrace{L \sin \varphi \left(\frac{mg}{2} - cD \right)}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{\frac{c}{2} (L^2 + D^2)}_{\text{costante}}$$

- $\frac{mg}{2} \neq cD \Rightarrow \underline{V \propto \sin \varphi + \text{costante}}$

i minimi sono $+\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

$\frac{mg}{2} > cD \quad -\frac{\pi}{2}$ stabile

$< \dots\dots\dots$

- se $\frac{mg}{2} = cD \rightarrow V$ è una costante

$\Rightarrow$ equilibrio (indifferente) per ogni φ

Ripetiamo ma con l' E.C.S.

$$\bullet \quad \underline{M}^e(0) = \underline{0}$$

$$- m g \frac{L}{2} \cos \varphi + (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge \left[- c (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \right] \cdot \underline{e}_3$$

$(\underline{x}_A - \underline{x}_O)$ $\wedge$ $\underline{F}_A$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 punto polo
 di applicazione

$$(\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge \left[- c (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ L \cos \varphi & L \sin \varphi & 0 \\ -c L \cos \varphi & -c (L \sin \varphi - D) & 0 \end{vmatrix} = c L D \cos \varphi \underline{e}_3$$

Eq. $\underline{M}^e(0) = \underline{0}$ si riduce

$$- m g \frac{L}{2} \cos \varphi + c L D \cos \varphi = 0 \rightarrow V'(\varphi)$$

Infatti:

$$\underline{M}^e(0) \cdot \underline{e}_3 = Q_\varphi = - \frac{dV}{d\varphi}$$

Per finire $\rightarrow$ calcoliamo le reazioni

vincolari

Usiamo l'eq. della risultante

$\underline{R}^e = \underline{0} \rightarrow 2 \text{ componenti: lungo } \underline{e}_1 \text{ e } \underline{e}_2$

$$\underline{e}_1: H_0 + \underline{e}_1 \cdot [-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)] = 0$$

$$H_0 + \underset{\uparrow}{\underline{e}_1} \cdot [-c(L \cos \varphi \underline{e}_1 + (L \sin \varphi - D) \underset{\uparrow}{\underline{e}_2})]$$

$$\Rightarrow \underline{H_0 = c L \cos \varphi}$$

$$\underline{e}_2: V_0 - mg + \underline{e}_2 \cdot [-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)] = 0$$

$$\underline{V_0 = mg + c(L \sin \varphi - D)}$$

Calcolate nelle configurazioni di eq.

Se $\frac{mg}{2} \neq cD$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 = 0 \\ V_0 = mg + c(L - D) \end{array} \right.$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 = 0 \\ V_0 = mg - c(L + D) \end{array} \right.$$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 18 MARZO 2020

— SECONDA PARTE

Applicazioni alla statica dei sistemi articolati

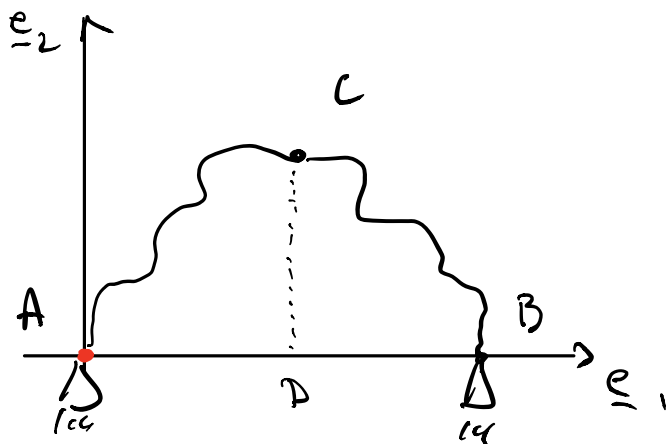
corpo rigido $\rightarrow$ ECS necessarie e sufficienti

Per corpi articolati, le ECS applicate a tutto il sistema, non sono in grado di garantire l'equilibrio.

Lo sono però, se le applichiamo ad ogni componente separatamente, a patto di considerare anche le azioni interne di una componente sull'altra.

Free body

Arco e Tre cerniere

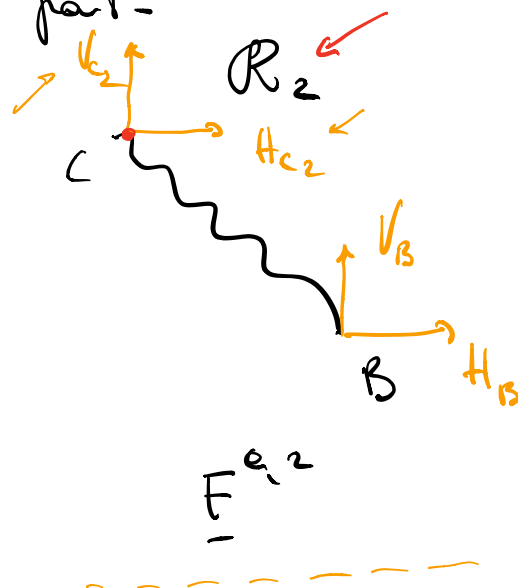
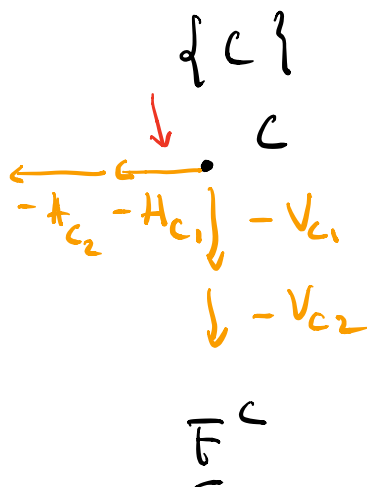
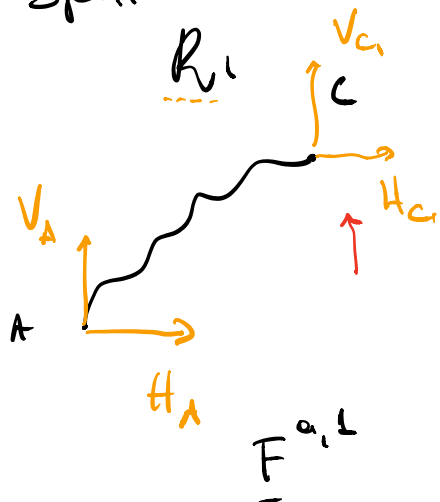


$$R_1 \cup R_2 \cup \{C\}$$

$\uparrow$ AC $\uparrow$ CB $\uparrow$ cerniere

Supponiamo note
le forze attive
agenti sui sistemi

Scriviamo le reazioni



8 incognite di reazione

$$\mathbf{f}^r = (\underbrace{H_A, V_A}_{\text{...}}, \underbrace{H_B, V_B}_{\text{...}}, \underbrace{H_{C1}, V_{C1}}_{\text{...}}, \underbrace{H_{C2}, V_{C2}}_{\text{...}})$$

Idee: applichiamo ECS a tutto il sistema
e a tutti i suoi sottosistemi

1) ECS a tutto $R_1 \cup R_2 \cup \{C\}$

$$\rightarrow \underline{R}^e = \underline{0} \quad : \quad \begin{aligned} \underline{e}_1 &\rightarrow \underline{H}_A + \underline{H}_B + \underline{R}^{e_1} \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ \underline{e}_2 &\rightarrow \underline{V}_A + \underline{V}_B + \underline{R}^{e_2} \cdot \underline{e}_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{M}^e(A) = \underline{0} \Rightarrow \overline{AB} \underline{V}_B + \underline{M}^{e_1}(A) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(\underline{x}_A - \underline{x}_A)}_0 \wedge (\underline{H}_A \underline{e}_1 + \underline{V}_A \underline{e}_2)$$

risolto per $\underline{V}_B$

2) ECS sul sottosistema R_2

$$\underline{M}^{e_1,2}(C) = \underline{0} \quad : \quad \overline{CD} \underline{H}_B + \overline{DB} \underline{V}_B + \underline{M}^{e_1,2}(C) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

se $\overline{CD} \neq 0$, ricaviamo $\underline{H}_B$

$$\underline{R}^{e_1,2} = \underline{0}$$

$$\underline{e}_1 : \underline{H}_B + \underline{H}_{C_2} + \underline{F}^{e_1,2} \cdot \underline{e}_1 = 0$$

$$\underline{e}_2 : \underline{V}_B + \underline{V}_{C_2} + \underline{F}^{e_1,2} \cdot \underline{e}_2 = 0$$

3) Consideriamo il nodo $\{C\}$

$$\underline{R}^e = \underline{0} \quad \underline{e}_1 : -\underline{H}_{C_1} - \underline{H}_{C_2} + \underline{F}_C \cdot \underline{e}_1 = 0$$

$$\underline{e}_2 : -\underline{V}_{C_1} - \underline{V}_{C_2} + \underline{F}_C \cdot \underline{e}_2 = 0$$

Assumendo $\overline{AB} \neq 0$, $\overline{CD} \neq 0$

$$V_b = - \frac{\underline{F}^{c,0} \cdot \underline{e}_3}{\overline{AB}} \rightarrow \infty \text{ se } \overline{AB} \rightarrow 0$$

Osservazione: abbiamo applicato E.C.S

$$\cdot R_1 \cup R_2 \cup \{C\}$$

$$\cdot R_2$$

$$\cdot \{C\}$$

$$\rightarrow R_1, R_1 \cup \{C\}, \dots$$

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 18 MARZO 2020

- TERZA PARTE

Commento: sistema di equazioni

$$\begin{array}{c} \overline{AB}, \overline{CD}, \dots \\ \uparrow \\ A \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ (u_A, v_A, u_B, \dots)}}{F^e} = \underset{\substack{\nwarrow \text{note}}}{F^a} \end{array} \quad (\quad) (\quad) = (\quad)$$

$\rightarrow \det A \neq 0$ vincoli indipendenti

$\det A = 0 \rightarrow$ vincoli non indipendenti:

Dipende dalle forze attive F^a . A seconda di F^a

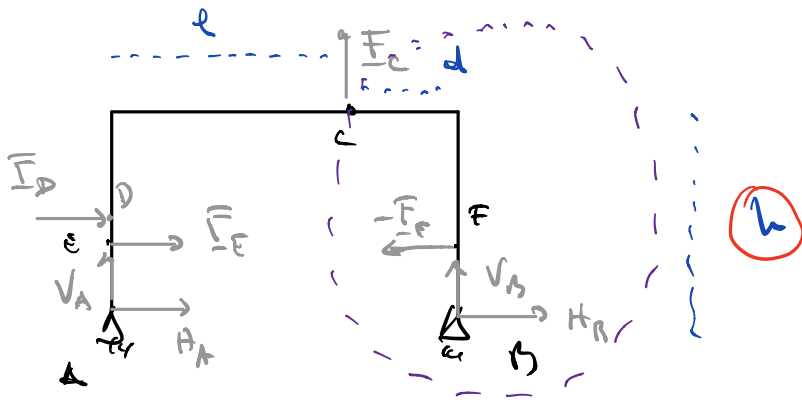
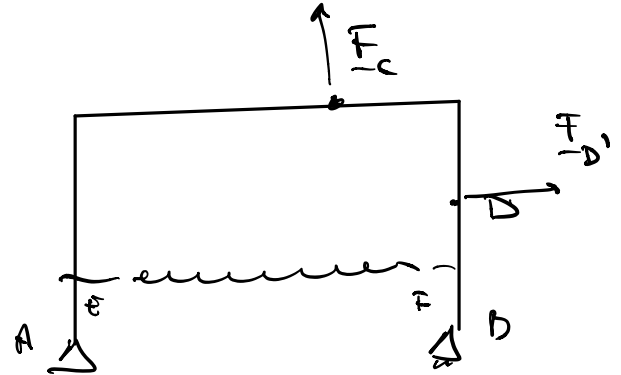
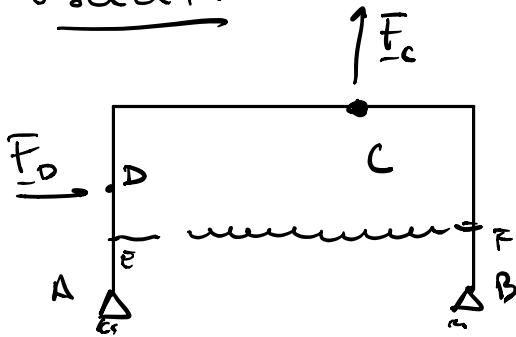
$\rightarrow$ no soluzione (problema impossibile le cerniere si rompono)

$\rightarrow \infty$ soluzioni $\rightarrow$ staticamente indeterminato

Descrizione

Piano orizzontale

$AC \cup CB \cup \{C\}$



$$\underline{F}_D = F_D \underline{e}_1$$

$$\underline{F}_C = F_C \underline{e}_2$$

$$\underline{F}_F = -C(\underline{x}_E - \underline{x}_F)$$

ECS tutto il sistema

$$\cdot \underline{R}^e = \underline{0} \quad \underline{e}_1 \quad H_A + H_B + \underline{F}_D = 0$$

$$\underline{e}_2 \quad V_A + V_B + F_C = 0$$

$$\cdot \underline{M}^e(A) = 0 \quad \overline{AB} V_B - \underline{F}_D \overline{AD} + F_C l = 0$$

(verificato esplicitamente)

$$\sum_P (\underline{x}_P - \underline{x}_A) \wedge \overline{F}_P$$

Resolviendo $V_B = \frac{1}{AM} (\overline{F_D AD} - \overline{F_c l})$

$$V_A = -V_B - F_c = -F_D \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} + F_c \left(\frac{1}{\overline{AB}} - 1 \right)$$

Consideriamo solo l'arco CB

$$M_{CB}^c(C) = 10$$

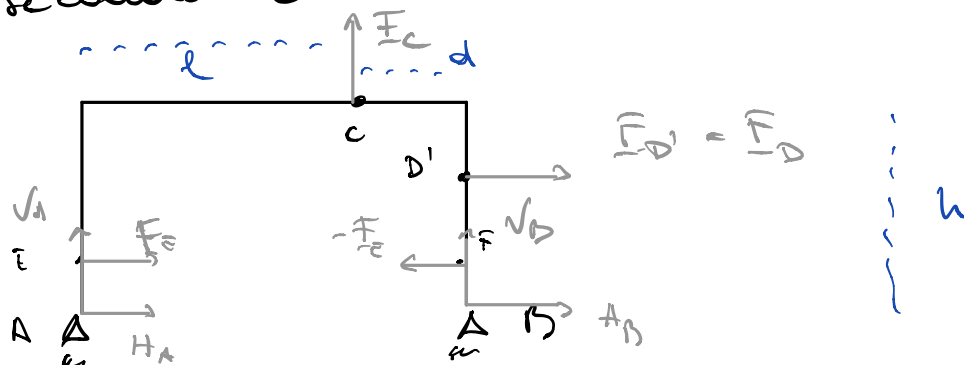
$$h H_B + d V_B + (-c AB) (h - \overline{BF}) = 0$$

(verificatelo explicitamente)

$$H_B = - \frac{d}{h} V_B + c \overline{AB} \left(1 - \frac{\overline{BF}}{h} \right)$$

dal punto precedente $H_A = -H_B - F_D$

secondo caso



FLS

1) Tutto il sistema

→ sistema equo, di prima

$$\underline{R}^{\leftarrow}, \quad \underline{M}^{\leftarrow}(A) \quad (AD = BD')$$

2) sistema = solo l'arco BC

adesso c'è $\underline{F}_D$ applicato a D

$$\underline{M}_{BC}^{\leftarrow}(C) = \underline{0}$$

$$h H_B + d V_B - c \overline{AB} (h - \overline{BF}) + \underline{F}_D (h - \overline{DB}) = 0$$

$$\rightarrow H_B = -\frac{d}{h} V_B + c \overline{AB} \left(1 - \frac{\overline{BF}}{h}\right) - \underline{F}_D \left(1 - \frac{\overline{DB}}{h}\right)$$

$$H_A = (\text{dal punto 1}) = -H_B - \underline{F}_D$$

come prima

Nei due casi le reazioni cambiano