$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$ ← eq. diff. 2° ord.

può essere ridotta a un sistema di eq. diff. del 1° ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix}}_{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v,t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v,t) \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)} \qquad (*)$$

↓

Vale il TEOREMA DI ESISTENZA e UNICITÀ

Prop. Se $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ è localm. Lipschitziana in un aperto U, allora $\forall \bar{x}_0 \in U$,

$\exists$ intervallo $(-\tau, \tau)$ e un' UNICA soluz. $\bar{x}(t)$ dell' eq. $(*)$ $(\bar{x} \in \mathbb{R}^n)$

def. per $t \in (-\tau, \tau)$ t.c. $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$.

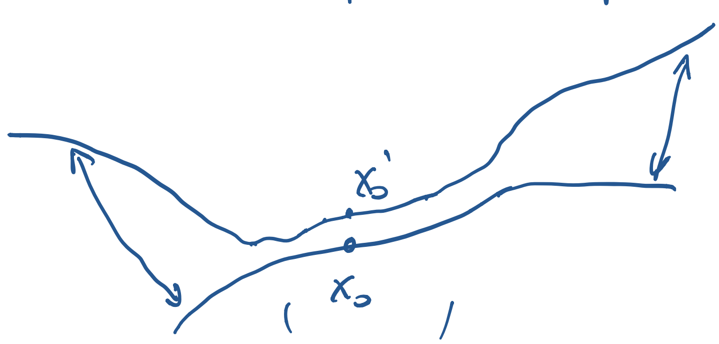
condiz. iniziale

Se cambio dato iniziale $\bar{x}_0$, cambia la soluzione

$\bar{x}(t\,;\,\bar{x}_0)$

parametro della funz. $\bar{x}(t)$ che risolve eq. $(*)$ con condiz. iniziale $\bar{x}_0$

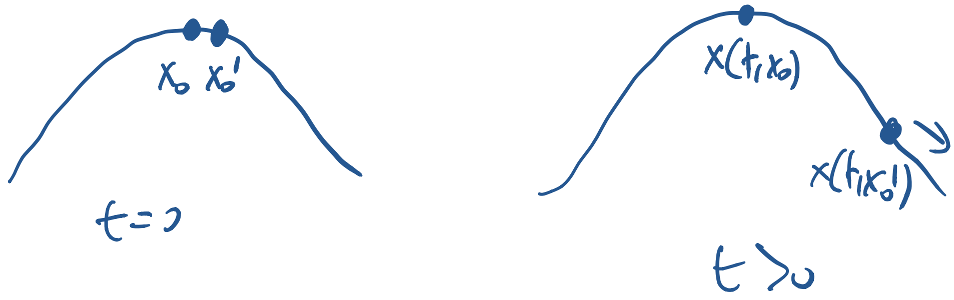
la soluz. dipende con regolarità dal dato iniziale (e da eventuali parametri presenti in $\bar{f}$)



$$\|\bar{x}(t,\bar{x}_0') - \bar{x}(t,\bar{x}_0)\| < C\|\bar{x}_0' - \bar{x}_0\| e^{\lambda |t|}$$

$\lambda > 0$

ES. repulsore armonico



SISTEMA AUTONOMO

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (\star)$$

$\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è detto CAMPO VETTORIALE

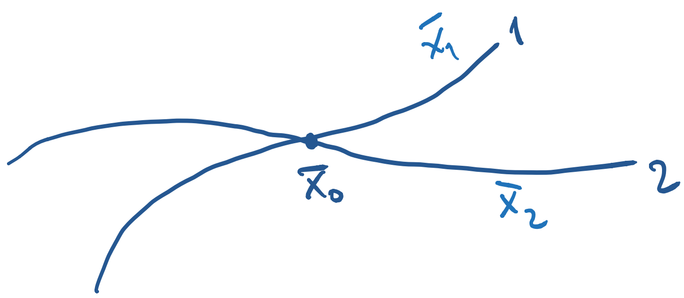
- Per sistemi autonomi, abbiamo invarianza per traslazioni temporali:
  se $\bar{x}(t)$ è soluz. di $(\star)$, anche
  $$\bar{x}'(t) \equiv \bar{x}(t-t_0) \text{ è soluz. di } (\star)$$

$\underline{\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))}$ $\qquad \dot{\bar{x}}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}(t-t_0) = \dot{\bar{x}}(t-t_0) =$

$$= \bar{f}(\bar{x}(t-t_0)) = \bar{f}(\bar{x}'(t)) \,//$$

$\Rightarrow$ Traiettorie(*) delle soluz. di ($\bigstar$) non si intersecano mai.

Dim. Assumiamo per assurdo che ci siano due traiettorie che si intersecano in $\bar{x}_0$:



$$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_0$$
$$\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_0$$
$$\exists\ \bar{x}_3(t) \equiv \bar{x}_2(t+t_0)$$
t.c. $\bar{x}_3(0) = \bar{x}_0$

Quindi:
se esistessero due traiettorie intersecanti nel pto $\bar{x}_0$, esisterebbero due soluz. di ($\bigstar$) ($\bar{x}_1$ & $\bar{x}_3$) passanti in $\bar{x}_0$ al tempo $t=0$, violando il teorema di esistenza e unicità. //

(*) Traiettorie sono immagini delle funzione $\bar{x}(t)$ in $\mathbb{R}^n$.

CASO MECCANICO (autonomo)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Passiamo al "piano di fase", cioè lo spazio con coordinate $\bar{x} = (x, v)$.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \text{dove} \qquad \bar{f}(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$$

Dato il dato iniziale $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, c'è un'unica soluzione che passa per $\bar{x}_0$ al tempo $t=0$.

Le soluzioni dipenderanno dai parametri x_0, v_0.

ES. OSC. ARM.

soluz:
$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$$

cond. iniz.
$$x_0 = x(0) = a$$
$$v_0 = \dot{x}(0) = b\omega$$
$$\Rightarrow \quad a = x_0, \quad b = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t; x_0, v_0) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad \bar{x}(t; \bar{x}_0)$$
$$v(t, x_0, v_0) = -\omega x_0 \sin\omega t + v_0\cos\omega t$$

scelti x_0, v_0, la soluz. è determinata.

FLUSSO del campo vettoriale

Data $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$\forall \bar{x}_0$, $\exists!$ sol $\bar{x} = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$

- Fissato $\bar{x}_0$, descrive una curva in $\mathbb{R}^n$

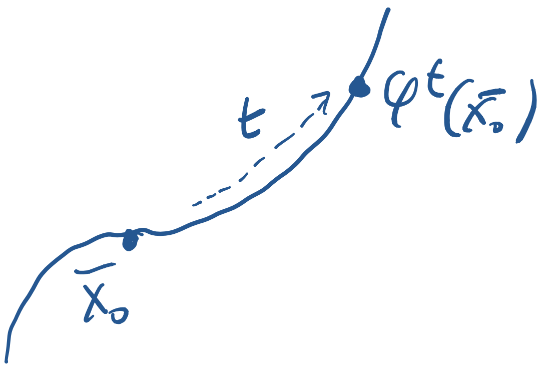
- Fissato t, $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ è una funzione in $\bar{x}_0$,

cioè descrive una mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è sol. di (*)

$$\bar{x}_0 \longmapsto \varphi^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$$



t è un parametro della mappa $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Al variare di t si ha una famiglia a un parametro di automorfismi di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

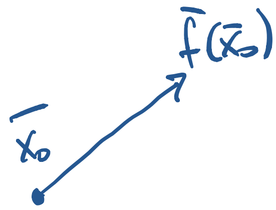
La famiglia $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ si dice il **FLUSSO** relativo al campo vettoriale $\bar{f}$

[$\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un GRUPPO :

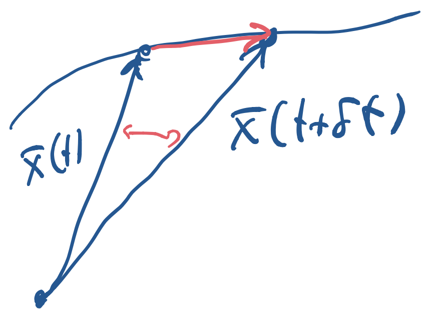
Id : φ^0 comp. $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$

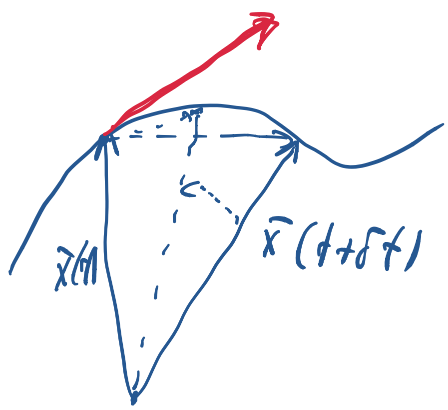
Inverso : φ^{-t}]

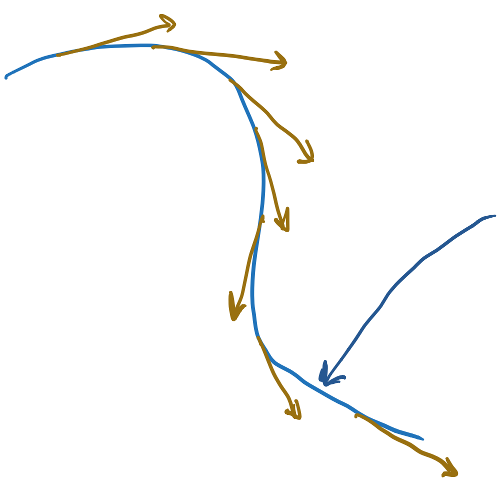
$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $\rightsquigarrow$ curva $\bar{x}(t)$ che passa per $\bar{x}_0$ deve essere TANGENTE al vettore $\bar{f}(\bar{x}_0)$



$$\dot{\bar{x}}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\bar{x}(t+\delta t) - \bar{x}(t)}{\delta t}$$







"linea di forza" o "linea di flusso" del campo vettoriale

Soluzioni di equilibrio

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $\iff$ $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$

vero $\forall t$

Cerchiamo soluz. particolari: funzioni COSTANTI $\downarrow$ "PUNTI DI EQUILIBRIO"

$\bar{x}(t) = \bar{c}$ $\quad \bar{c} \in \mathbb{R}^n$

$\uparrow$ costante (indip. da t)

$\dot{\bar{x}}(t) = 0 \qquad \bar{f}(\bar{x}(t)) = \bar{f}(\bar{c}) \underset{\text{soluz. se}}{\Longrightarrow} \underline{\bar{f}(\bar{c}) = 0}$

Prop. I punti di equilibrio dell'eq. (*) sono tutti e soli i punti dove $\bar{f}(\bar{x})$ si azzera.

("Punti singolari" del campo vettoriale).

Corollario. Nel caso meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, i pti singolari o di equil. sono del tipo $(c, 0)$. Nel piano di fase, i pti di equil. giacciono sull'asse delle ascisse e sono t.c.

$\underset{x\nearrow}{c}$, $\underset{v\nearrow}{0}$

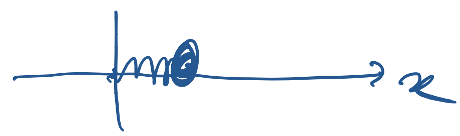
$f(c, 0) = 0$ ($\leftarrow$ FORZA)

[Dim. $\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{f} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ f(x,0) = 0 \end{cases}$]

ES. Particella libera: tutti i pti sull'asse delle x sono di equilibrio.

ES. Osc. armonico

$$f(x,v) = -\omega^2 x$$

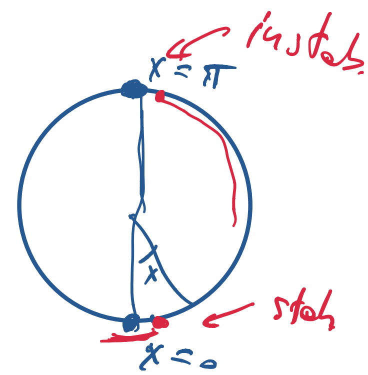


→ pti equil. $x = 0$

ES. Pendolo

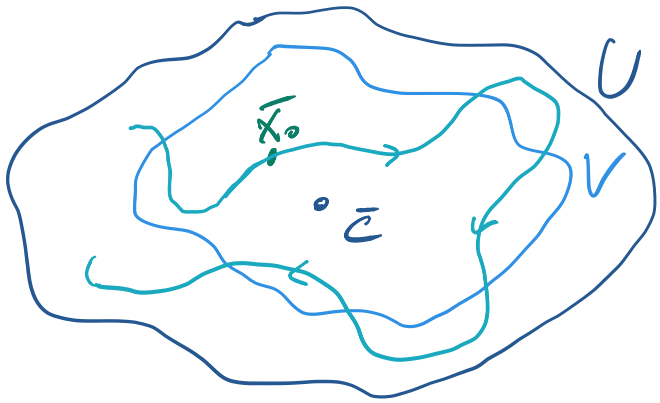
$$f(x,v) = -\sin x$$

→ pti di equil. $x = 0, \pi$



Attorno ai pti di equil., possiamo avere informazioni approssimate sulle traiettorie, anche per sistemi complicati.

Def. Un pto di equil. $\bar{c}$ di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ ($\bar{f}(\bar{c}) = 0$) si dice STABILE (o stab. nel futuro, o stab. nel passato) se $\forall$ intorno U di $\bar{c}$, $\exists$ intorno V di $\bar{c}$, t.c. ogni movimento $\bar{x}(t, \bar{x}_0)$ con dato iniz. $\bar{x}_0 \in V$ resta in U $\forall t$ ($\forall t \geq 0$, $\forall t < 0$)

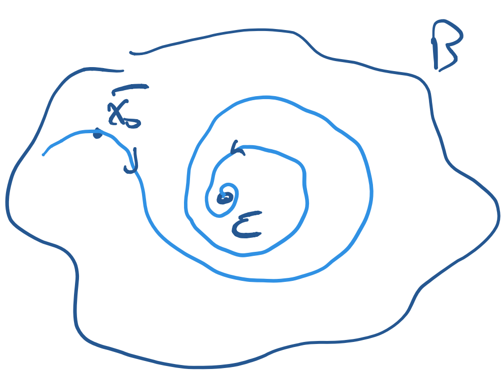


Def. $\bar{c}$ è instabile se non è stabile.

Def. $\bar{c}$ è asintoticam. stabile per tempi positivi (negativi) quando

a) è stabile per $t \geq 0$ ($t \leq 0$) e

b) $\exists B$ intorno di $\bar{c}$ (BACINO DI ATTRAZIONE) t.c. $\forall \bar{x}_0 \in B$ $\bar{x}(t, \bar{x}_0) \to \bar{c}$ per $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$)



COSTANTE DEL MOTO (INTEGRALE PRIMO, INVARIANTE DEL MOTO)

Def. Una funzione $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice COST. DEL MOTO per l'equazione

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*)$$

se

$$I(\bar{x}(t, \bar{x}_0)) = I(\bar{x}_0) \quad \Rightarrow \frac{dI(\bar{x}(t,\bar{x}_0))}{dt} = 0$$

$\forall t$ e $\forall$ solut. $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ di $(*)$

funzione composta

$$I \circ \bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto I(\bar{x}(t))$$

ES. osc. armonico

soluz. di $(*)$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t \\ v(t) = -x_0\omega \sin\omega t + v_0 \cos\omega t \end{cases}$$

$$I(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \quad \leftarrow \text{funz.} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,v) \mapsto I(x,v)$$

$$I(x(t), v(t)) = \frac{1}{2}\Big[x_0^2\omega^2 \sin^2\omega t + v_0^2 \cos^2\omega t - 2 x_0 v_0 \cancel{\omega} \sin\omega t \cos\omega t\Big]$$

$$+\ \frac{1}{2}\,\omega^2\left[\,x_0^2\cos^2\omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t + \cancel{2\frac{x_0 v_0}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t}\,\right]$$

$$= \frac{1}{2}x_0^2\omega^2 + \frac{1}{2}v_0^2 \qquad \underline{\text{COST.}}\ (\text{indip. da } t)$$

(Energia totale)