$$S(\phi) = \frac{1}{2} M_{ab}\,\phi^a\phi^b \qquad a,b = 1,\dots,n \qquad Z_0 = \frac{(2\pi\hbar)^{n/2}}{(\det M)^{1/2}}$$

$$Z_0(J) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi\; e^{-\frac{1}{2\hbar}M_{ab}\phi^a\phi^b}\, e^{-J_a\phi^a/\hbar}$$

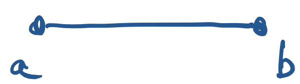
$$= e^{J\cdot M^{-1}\cdot J/2\hbar}\; Z_0(0)$$

$$(-1)^p\,\hbar^p\,\frac{1}{Z_0}\,\frac{\partial^p Z_0(J)}{\partial J_{a_1}\cdots\partial J_{a_p}}\bigg|_{J=0} = \frac{1}{Z_0}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi\; e^{-\frac{1}{2\hbar}M_{ab}\phi^a\phi^b}\;\phi^{a_1}\cdots\phi^{a_p} =$$

$$= \langle \phi^{a_1}\cdots\phi^{a_p}\rangle$$

$$\langle\phi^a\phi^b\rangle = \frac{\hbar^2}{Z_0(0)}\,\frac{\partial^2}{\partial J_a\partial J_b}Z_0(J)\bigg|_{J=0} = \frac{\hbar^{\cancel{2}}}{\cancel{\hbar}}\,\frac{\partial}{\partial J_a}\left[e^{\frac{J\cdot M^{-1}\cdot J}{2\hbar}}\cdot J_c(M^{-1})^{cb}\right]_{J=0}$$

$$= \hbar\, e^{JM^{-1}J/2\hbar}\,(M^{-1})^{ab}\Big|_{J=0} = \hbar\,(M^{-1})^{ab}$$



$$\langle \phi^{a_1} \cdots \phi^{a_m} \rangle = \frac{(-1)^m \hbar^m}{Z_0} \frac{\partial^m}{\partial J_{a_1} \cdots \partial J_{a_m}} Z_0(J) \Big|_{J=0}$$

- Per ogni derivata $\hbar \dfrac{\partial}{\partial J_a}$, otteniamo $\hbar (M^{-1})^{ab} J_b$

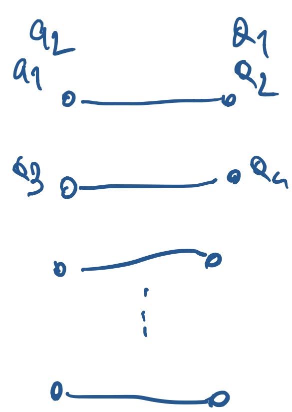
- Siccome alla fine mettiamo $J=0$, l'unico modo per ottenere un risultato diverso da zero è che metà delle derivate "portino giù" il fattore $\hbar M^{-1} J$ dell'esponente, e l'altra metà agisca su J, lasciando $\underline{\hbar M^{-1}}$ $\Rightarrow$ $m = 2k$

$$\Rightarrow \langle \phi^{a_1} \cdots \phi^{a_{2k}} \rangle = \hbar^{m/2} \sum_{\sigma \in \Pi_{2k}} \prod_{i \in \{1, \dots, 2k\}/\sigma} (M^{-1})^{a_i a_{\sigma(i)}}$$

$\sigma \in \Pi_{2k}$: insieme di tutti i possibili accoppiamenti inequivalenti

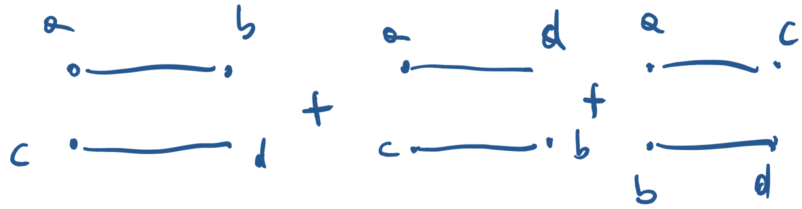
Wick's theorem (In $d=0$ Isserlis theor.)

$$|\Pi_{2k}| = \frac{(2k)!}{2^k \, k!}$$



$$\langle \phi^a \phi^b \phi^c \rangle = 0$$

$$\langle \phi^a \phi^b \phi^c \phi^d \rangle =$$



$$K = 2$$

$$|\Pi_4| = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = 3$$

$$= \hbar^2 \left[(M^{-1})^{ab} (M^{-1})^{cd} + (M^{-1})^{ad} (M^{-1})^{cb} + (M^{-1})^{ac} (M^{-1})^{bd} \right]$$

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

$S(\phi)$ è più che quadratica
(c'è un termine "d'interazione")

$$I(\hbar) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi \; f(\phi) \, e^{-S(\phi)/\hbar} \qquad (*)$$

sono tipicam. integrali trascend., che non si sanno risolvere analiticamente

$\Rightarrow$ abbiamo bisogno di APPROSSIMARE.

$\rightarrow$ Il meglio che riusciremo a fare è di ottenere una ESPANSIONE ASINTOTICA

[Se scegliamo $S(\phi)$ t.c. l'integrale $(*)$ converge $\forall \hbar > 0$, allora l'integrale divergerà per $\hbar < 0$; l'integrale non è ben def. in un intorno completo di $\hbar = 0$ $\rightarrow$ la serie di Taylor non convergerà.]

NOTA sull'espansione asintotica di integrali.

$$F(\lambda) = \int_C e^{\lambda R(z)} g(z)\, dz$$

C è un contorno in $\mathbb{C}$

Def. Una sequenza ASINTOTICA (a $z \to z_0$) è una seq. di funzioni $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ t.c.

se $n > m$ allora $\varphi_n(z) = o(\varphi_m(z))$ $z \to z_0$

Es. $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ è asint. per $z \to 0$

$\{z^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ " " " $z \to \infty$

Def. ESPANSIONE ASINTOTICA. Sia $\{\varphi_n\}$ seq. asint. allora $\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(z)$ è detta essere una approssimaz. asintotica per $z \to z_0$ di $f(z)$, se

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(z) = o(\varphi_N(z)) \qquad (*)$$

Se a_n sono cost. t.c. $(\star)$ è vera $\forall N$

allora la serie formale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ è detta

ESP. ASINTOTICA di $f(z)$ per $z \to z_0$.

E scriviamo:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$$

potrebbe divergere

Es.) $f \in C^\infty$, $z \sim 0$

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Infatti

un qualche numero fra 0 e z

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \frac{f^{(N+1)}(s)}{(N+1)!} z^{N+1}$$

$$= O(z^{N+1})$$

e quindi in particolare è $o(z^N)$

Nota:

- Una data funzione f può avere diverse espansioni asintotiche, e una serie asintotica può rappresentare diverse funzioni

- Data $\{\varphi_n(z)\}$, la serie asintotica di f rispetto a $\{\varphi_n(z)\}$ è UNICA.

ES

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^n} \qquad \lambda \to \infty$$

$$e^{-\lambda} + F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^n}$$

Diciamo che $e^{-\lambda}$ è "oltre tutti gli ordini perturbativi" rispetto a $\{\lambda^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$

$$\sum_n a_n \hbar^n$$

$$\lim_{\hbar \to 0^+} \frac{1}{\hbar^N} \left| I(\hbar) - \sum_{n=0}^{N} a_n \hbar^n \right| = 0$$

→ fissato N, per $\hbar > 0$ sufficientem. piccolo, i primi N termini della serie approssimano bene la funz. $I(\hbar)$

→ La funz. $I(\hbar)$ potrebbe avere contributi del tipo $e^{-1/\hbar^2}$ che non sono catturati dalla serie asintotica.

→ Se fissiamo un valore per $\hbar$ (piccolo quanto si vuole), includendo sempre più termini alla somma (aumentando N), finiremo con distorsioni della funz. $I(\hbar)$.

⇒ La teoria delle perturbazioni ci dice cose importanti di una QFT, ma non dà info complete.

Assumiamo che $S(\phi)$ sia regolare, con UN MINIMO a $\phi = \phi_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^a \partial\phi^b} \text{ è def. pos.} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi\, f(\phi) e^{-S(\phi)/\hbar} \underset{\hbar\to 0^+}{\sim} \frac{(2\pi\hbar)^{n/2} f(\phi_0) e^{-\frac{S(\phi_0)}{\hbar}}}{\sqrt{\det\left(\partial^2 S|_{\phi_0}\right)}} \left(1 + \hbar A_1 + \hbar^2 A_2 + \dots\right)$$

$$S(\phi) = S(\phi_0) + \underbrace{\cancel{\partial_a S|_{\phi_0}}}_{=0} \delta\phi^a + \frac{1}{2} \partial_a\partial_b S|_{\phi_0} \delta\phi^a \delta\phi^b + \dots$$

ϕ_0 min

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi\, f(\phi) e^{-S(\phi)/\hbar} \sim e^{-S(\phi_0)/\hbar} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\phi\, f(\phi)\, e^{-\partial^2_{ab} S\, \delta\phi^a \delta\phi^b / 2\hbar + \dots}$$

$$= e^{-S(\phi_0)/\hbar} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, \hbar^{n/2} f(\phi_0 + \underline{\sqrt{\hbar}\, x})\, e^{-\partial^2_{ab} S\, x^a x^b/2 + O(\hbar)}$$

$$\phi = \phi_0 + \sqrt{\hbar}\, x$$

$$\underset{\hbar\to 0}{\sim} \; e^{-S(\phi_0)/\hbar}\, \hbar^{n/2} f(\phi_0) \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, e^{-\partial^2_{ab} S\, x^a x^b/2} \left(1+O(\hbar)\right)$$

$$\sim \underbrace{\frac{(2\pi\hbar)^{n/2} e^{-S(\phi_0)/\hbar} f(\phi_0)}{\sqrt{\det \partial^2 S|_{\phi_0}}}}_{\text{analogo al contributo di una teoria LIBERA}} \left(1+\hbar A_1 + \hbar^2 A_2 + \dots\right)$$

$\boxed{\text{Es.}}$

$$S(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Vogliamo che la funz. di partizione converga

$\Rightarrow \lambda > 0$

Vogliamo che $S(\phi)$ abbia UN MINIMO a $\phi_0 = 0$

$\Rightarrow m^2 > 0$

$$\frac{(2\pi\hbar)^{n/2} e^{-S(\phi_0)/\hbar}}{\sqrt{\det \partial^2 S|_{\phi_0}}} \to \frac{(2\pi\hbar)^{1/2}\cdot 1}{m} = Z(m, 0)$$

λ

$n=1, \; S''|_{\phi=0} = m^2, \; S|_{\phi=0} = 0$

Consideriamo la funz. part. della teoria completa

$\lambda \to 0$

$$Z(m,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} d\phi \, e^{-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m^2\phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\phi \, e^{-\frac{m^2\phi^2}{2\hbar}} \, e^{-\frac{\lambda}{\hbar 4!}\phi^4} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\phi \, e^{-\frac{m^2\phi^2}{2\hbar}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{4!\hbar}\right)^n \frac{\phi^{4n}}{n!}$$

Possiamo ottenere un'espansione asintotica, troncando la serie all'ordine N

$$Z(m,\lambda) \sim \int_{\mathbb{R}^n} d\phi \, e^{-m^2\phi^2/2\hbar} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{-\lambda}{4!\hbar}\right)^n \frac{\phi^{4n}}{n!}$$

cambio variabili:

$$x = \frac{m^2\phi^2}{2\hbar} \qquad \phi^2 = \frac{2\hbar x}{m^2} \qquad \frac{\phi^{4n}}{\hbar^n} = \frac{2^{2n}\hbar^n x^{2n}}{m^{4n}} \quad //$$

$$\phi = x^{1/2}\frac{\sqrt{2\hbar}}{m} \qquad \phi \, d\phi = \frac{\hbar \, dx}{m^2}$$

$$d\phi = \frac{x^{-1/2}}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \, dx$$

$$= \frac{2}{\omega}\int_0^\infty x^{-1/2}\,dx \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{m=0}^{N} \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^m \frac{1}{m!} \frac{4^m k^m}{\omega^{4m}} x^{2m}$$

$$= \frac{\sqrt{2k}}{\omega} \int_0^\infty dx \sum_{m=0}^{N} e^{-x} x^{2m-1/2} \left(-\frac{\lambda k}{3!\,\omega^4}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} =$$

$$= \frac{\sqrt{2k}}{\omega} \sum_{m=0}^{N} \left(-\frac{\lambda k}{3!\,m^4}\right)^m \frac{1}{m!} \underbrace{\int_0^\infty dx\, x^{2m+\frac{1}{2}-1} e^{-x}}$$

possiamo scambiare $\int$ con $\sum$ perché la somma è finita (scambio $\int$ con $\sum^{\infty}$ è permesso se la serie è ASSOLUTAM. CONVERG., cosa che in qto caso non avviene)

$$Z(\omega,\lambda) \sim \frac{\sqrt{2k}}{\omega} \sum_{m=0}^{N} \left(-\frac{\lambda k}{3!\,\omega^4}\right)^m \frac{1}{m!}\, \Gamma\!\left(2m+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\!\left(2m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(4n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n \cdot 4^n\,(2n)!}$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{2k\pi}}{\omega}}_{Z_0} \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{(k\lambda)^m}{\omega^{4n}} \frac{1}{(4!)^m m!} \frac{(4n)!}{4^n\,(2n)!}$$

$$= Z_0 \left(1 - \frac{\hbar \lambda}{8 m^4} + \frac{\hbar^2 \lambda^2}{m^8} \frac{35}{384} + \dots \right)$$

Osservazioni:

- ogni termine della serie è una potenza di $\frac{\hbar \lambda}{m^4}$ $\rightarrow$ fissata da analisi dimensionale

$$S = \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \sim [\hbar]$$

$$[\phi^2] \sim \left[\frac{\hbar}{m^2} \right] \qquad [\lambda] = \left[\frac{\hbar}{\phi^4} \right] = \left[\frac{m^4}{\hbar} \right]$$

$\left[\frac{\hbar \lambda}{m^4} \right]$ adimensionale