Struttura per Scadenza dei Tassi

Struttura per Scadenza dei Tassi

- Obbiettivo è la costruzione della struttura per scadenza dei tassi (o curva dei tassi).
- A tal fine si considera un modello idealizzato di mercato obbligazionario, caratterizzato da numerose ipotesi semplificatrici, più o meno forti.
- Nella realtà la curva dei tassi è relativa ad un emittente (e.g. uno stato) o ad un certo tipo di mercato (LIBOR, EURIBOR, imprese con un dato rating), ad una certa valuta, ad un certo intervallo temporale, ...

Ipotesi: Scadenzario

- Sia $\mathbb{T}$ lo scadenzario (tenor), cioè l'insieme delle epoche in cui avvengono le transazioni. In particolare, concentriamo l'attenzione su due casi.
  - ⋆ Scadenzario discreto (finito o infinito):

$$\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots\}.$$

    Caso particolare: $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per ogni $i \geq 1$.
  - ⋆ Scadenzario continuo:

$$\mathbb{T} = [0, T] \text{ oppure } \mathbb{T} = [0, +\infty[$$

  - ⋆ $0 =$ oggi; il tempo viene misurato in anni.

Ipotesi: Mercati Perfetti

- Mercato Competitivo: gli agenti sono price-takers (non price-makers) cioè con le loro azioni non modificano i prezzi.
- Mercato privo di Frizionalità: non ci sono tassazioni sui guadagni, né costi di transazione, non ci sono vincoli di vendita allo scoperto (short-selling) e i titoli sono perfettamente divisibili.
- Mercato privo di Opportunità di Arbitraggio (AOA). Un'arbitraggio (free-lunch) è una strategia che produce una sequenza di cash-flows nonnegativi in ogni epoca ed in ogni stato del mondo, e, con probabilità positiva, un cash-flow positivo in qualche epoca.
  - AOA è condizione necessaria per l'equilibrio;
  - AOA $\Rightarrow$ Legge del prezzo unico: due strategie che offrono gli stessi cash-flows devono avere lo stesso valore iniziale.

Struttura per Scadenza dei Prezzi

- Per ogni $s \in \mathbb{T}$, $s > 0$ supponiamo che vi sia un titolo a cedola nulla (TCN) con scadenza in s, di valore nominale 1€, e che tale titolo possa essere scambiato ad ogni epoca $t \in \mathbb{T}$, $t < s$. Il suo prezzo sarà indicato con $B(t, s)$.
- $B(t, s)$ può essere visto come fattore di sconto tra s e t: il valore in t di C€ in s è $CB(t, s)$.
- Proprietà di $B(t, s)$:
  - Ci mettiamo nel caso in cui i TCN siano default-free, cioè pagano con certezza 1€ a scadenza. A tal fine possiamo pensare a titoli emessi da uno stato o altro emittente con rating elevato. Di conseguenza deve essere $B(s, s) = 1$.
  - Per AOA, deve essere inoltre $B(t, s) > 0$ per $t < s$ e $B(t, s) = 0$ per $t > s$.
- Si chiama **struttura per scadenza dei prezzi (discount function)** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ la funzione

$$s \to B(t, s); \quad s \geq t, \; s \in \mathbb{T}.$$

Struttura per Scadenza dei Tassi a Pronti

- Convenzione: tutti i tassi che consideriamo sono annualizzati.
- Definiamo il **tasso a pronti** in t per l'epoca s, $r(t,s)$, con $t,\ s \in \mathbb{T},\ t < s$ tramite la

$$B(t,s) = \mathrm{e}^{-(s-t)r(t,s)}.$$

  - ⋆ Quindi $r(t,s)$ è il tasso di rendimento (intensità d'interesse), in regime di interesse composto, corrispondente all'operazione in cui si compra in t il TCN e lo si detiene fino alla scadenza s.
  - ⋆ Si tratta di tassi a pronti (**spot**), cioè tassi concordati in t per un investimento che inizia in t stesso.
- Riesce dunque

$$r(t,s) = -\frac{1}{s-t} \log B(t,s)$$

- La **struttura per scadenza dei tassi a pronti** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to r(t,s); \quad s \geq t,\ s \in \mathbb{T}.$$

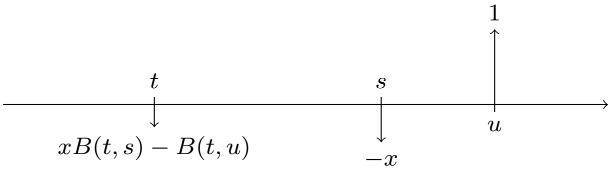
Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi**.

Day Count Conventions

- Al fine di calcolare tassi e rendimenti, occorre calcolare la frazione d'anno che intercorre fra due date. Prevalgono regole di calcolo diverso a seconda dei mercati e degli strumenti. La maggior parte delle regole rientrano fra le seguenti (o fra loro varianti).
  1. Actual/Actual: numero effettivo di giorni fra le due date rapportato al numero effettivo di giorni nell'anno (365 o 366), con correzioni se fra due anni diversi.
  2. Actual/360 (Variante: Actual/365): numero effettivo di giorni fra le due date diviso 360 (o 365).
  3. 30/360: ogni mese ha 30 giorni, ogni anno ha 360 giorni.
- Esempio: frazione d'anno tra 27/2/07 e 5/1/07: 1) $53/365 = 0.1452$, 2) $53/360 = 0.1472$, 3) $52/360 = 0.1444$.
- Importanti sono anche le 'business date conventions', in base alle quali date di pagamento che coincidono con festività vengono convertite in date lavorative.
- Excel: *YEARFRAC* e *WORKDAY*; **R**: eg pacchetti **RQuantlib** e la suite **RMetrics**

Tassi a Termine

- A differenza dei tassi a pronti, i **tassi a termine** o **forward** sono relativi a investimenti concordati in un dato istante, che iniziano in un istante successivo.
- Fissati $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < u$, consideriamo la seguente operazione costruita all'epoca t.
  - Acquisto un TCN con scadenza u: flusso in t pari a $-B(t,u)$ ed in u pari a $+1$;
  - vendo x TCN con scadenza s: flusso in t pari a $+xB(t,s)$ ed in s pari a $-x$.

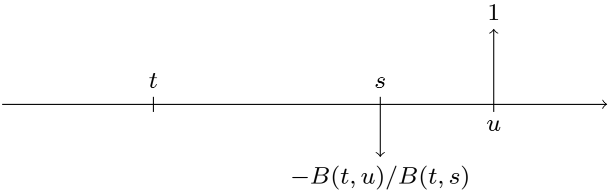


. . . Tassi a Termine

- ⋆ Scegliamo x in maniera tale che il flusso in t sia nullo:

$$xB(t,s) - B(t,u) = 0 \Leftrightarrow x = B(t,u)/B(t,s).$$

- ⋆ La situazione è allora



- Tale operazione genera flussi di cassa in s ed u, ma non in t (istante in cui l'operazione è concordata).

. . . Tassi a Termine

- Si definisce **tasso a termine** in t per il periodo $[s,u]$, $f(t,s,u)$, il tasso di rendimento (in regime di interesse composto) corrispondente a questa operazione:

$$\frac{B(t,u)}{B(t,s)} = \mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

da cui si ricava che

$$f(t,s,u) = -\frac{1}{u-s}\log\frac{B(t,u)}{B(t,s)}.$$

- La **struttura per scadenza dei tassi forward** all'epoca t è la funzione

$$(s,u) \to f(t,s,u), \;\; u > s \geq t, \; s, \; u \in \mathbb{T}.$$

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

- È equivalente conoscere, ad una certa epoca t, i prezzi $B(t,s)$, i tassi a pronti $r(t,s)$ o i tassi a termine $f(t,s,u)$.
  - Infatti, noti i prezzi, si determinano (per costruzione) i tassi a termine.
  - Viceversa, noti i tassi a termine, si hanno come caso particolare i tassi a pronti: ponendo $s = t$ in $f(t,s,u)$ si trova

$$\begin{aligned} f(t,t,u) &= -\frac{1}{u-t}\log\frac{B(t,u)}{B(t,t)} \\ &= -\frac{1}{u-t}\log B(t,u) \\ &= r(t,u). \end{aligned}$$

  - Infine, come già osservato, noti i tassi a pronti, sono noti anche i prezzi.

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

- Per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$, $r(t,u) > 0 \Leftrightarrow B(t,u) < 1$ cioè i tassi a pronti sono positivi se e solo se il corrispondente TCN vende a sconto.
- L'ultima proprietà ha le seguenti implicazioni: le seguenti proposizioni sono equivalenti
  1. $B(t,s) > B(t,u)$ per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ e $t \leq s < u$
  2. $f(t,s,u) > 0$ per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ e $t \leq s < u$
  3. $B(t,u) < 1$ per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$
  4. $r(t,u) > 0$ per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$

  (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dalla definizione di $f(t,s,u)$,

  $$B(t,u) = B(t,s)\mathrm{e}^{-f(t,s,u)(u-s)}.$$

  (3) $\Leftrightarrow$ (4) è stata vista sopra.
  (1) $\Rightarrow$ (3) basta prendere $t = s$ in (1).
  Per provare che (3) $\Rightarrow$ (1), consideriamo la seguente strategia: in t acquisto di un TCN con scadenza s, vendita di un TCN con scadenza u; in s acquisto di un TCN con scadenza u

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

- I flussi di cassa sono:
  - in t, $-B(t,s)+B(t,u)$
  - in s, $1-B(s,u)$
  - in u, $1-1=0$

  essendo il flusso in s dato da $1-B(s,u)>0$ (da (3)), il flusso in t deve essere $-B(t,s)+B(t,u)<0$, cioè $B(t,u)<B(t,s)$ altrimenti ci sarebbe un arbitraggio.
- quindi i tassi sono (sempre) positivi sse la 'discount function' è (sempre) decrescente.

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

- Fissiamo $t < s < u$;
  - partendo dalla

$$B(t,u) = B(t,s)\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

sostituendo i tassi a pronti si trova

$$\mathrm{e}^{-(u-t)r(t,u)} = \mathrm{e}^{-(s-t)r(t,s)}\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

  - passando ai logaritmi e esplicitando $r(t,u)$,

$$r(t,u) = \frac{s-t}{u-t}r(t,s) + \frac{u-s}{u-t}f(t,s,u)$$

cioè il tasso 'a lungo termine' $r(t,u)$ è media ponderata del tasso 'a breve termine' $r(t,s) = f(t,t,s)$ e del tasso forward $f(t,s,u)$;

Tassi a pronti e a Termine

▷ Dalla relazione che esprime $r(t,u)$ come media ponderata di $r(t,s)$ e $f(t,s,u)$ si trova che, per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}\,(t < s < u)$

$$r(t,s) > r(t,u) \Leftrightarrow r(t,s) > r(t,u) > f(t,s,u)$$
$$r(t,s) < r(t,u) \Leftrightarrow r(t,s) < r(t,u) < f(t,s,u).$$

▷ Ne segue che

- ⋆ Se la struttura dei tassi a pronti è crescente (descrescente) allora è dominata dai (domina i) tassi a termine.
- ⋆ Quando la curva dei tassi a pronti ‘cambia andamento’, cioè passa da crescenza a decrescenza o viceversa, allora la curva dei tassi a termine ‘attraversa’ quella dei tassi a pronti.

Tassi e Intensità

- In luogo delle intensità di interesse, $r(t,s)$ (spot) e $f(t,s,u)$ (forward), si possono utilizzare i corrispondenti tassi di interesse.
- Il legame tra queste quantità è dato da

$$(1+\text{tasso})^{\text{periodo}} = \mathrm{e}^{\text{periodo}\cdot\text{intensità}}.$$

- Avremo quindi i tassi $i(t,s)$ (spot) e $i_f(t,s,u)$ (forward), definiti da

$$1+i(t,s) = \mathrm{e}^{r(t,s)}$$
$$1+i_f(t,s,u) = \mathrm{e}^{f(t,s,u)},$$

  e legati da

$$(1+i(t,u))^{u-t} = (1+i(t,s))^{s-t}(1+i_f(t,s,u))^{u-s},$$

  quindi il fattore di capitalizzazione 'a lungo' $1+i(t,u)$ è media geometrica dei corrispondenti fattori 'a breve' e a termine.

Tassi Semplici

- A volte si calcola il rendimento di un'operazione basandosi su tassi semplici (cioè in regime di interesse semplice), soprattutto per investimenti di durata inferiore a 1 anno.
- Definiamo allora il **tasso semplice** a pronti in t per l'epoca s, $L(t,s)$, con $t,\ s \in \mathbb{T}$ e $t \leq s$, come il tasso in regime di interesse semplice corrispondente ad un investimento tra t e s:

$$B(t,s) = \frac{1}{1 + L(t,s)(s-t)},$$

da cui si ricava

$$L(t,s) = \frac{1}{s-t}\left[\frac{1}{B(t,s)} - 1\right].$$

- La **struttura per scadenza dei tassi semplici** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to L(t,s), \quad s \geq t, \ s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la curva dei tassi semplici.

Tassi semplici a termine

- Il tasso semplice a termine in t per il periodo $[s,u]$, $L_f(t,s,u)$, con $t \leq s < u$ e $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ è definito implicitamente da

$$(1+L(t,s)(s-t))(1+L_f(t,s,u)(u-s)) = (1+L(t,u)(u-t)),$$

- Il legame con le altre quantità introdotte in precedenza è dato da:

$$\begin{aligned} L_f(t,s,u) &= \frac{1}{u-s}\left[\frac{1+L(t,u)(u-t)}{1+L(t,s)(s-t)} - 1\right] \\ &= \frac{1}{u-s}\left[\frac{B(t,s)}{B(t,u)} - 1\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(u-s)f(t,s,u)} - 1}{u-s}. \end{aligned}$$

- Il tasso a lungo semplice non è media di tasso breve e tasso forward

Scadenzario Discreto

- Consideriamo il caso $\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots\}$;
  - ⋆ poniamo $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ per $i \geq 0$.
  - ⋆ Per $t_i, t_j \in \mathbb{T}$ con $t_i \leq t_j < \sup \mathbb{T}$, definiamo **il tasso a termine uniperiodale** in t_i per t_j, $f(t_i, t_j)$, come il tasso a termine dell'investimento stabilito in t_i, che comincia in t_j e termina nell'epoca successiva t_{j+1}:

$$\begin{aligned} f(t_i, t_j) &= f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= -\frac{1}{\Delta_j} \log \frac{B(t_i, t_{j+1})}{B(t_i, t_j)}. \end{aligned}$$

- La **struttura dei tassi a termine uniperiodali** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to f(t, s), \quad t < s < \sup \mathbb{T}, \; t, \; s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine uniperiodali**.

Scadenzario Discreto

- Dai tassi uniperiodali si possono ricostruire le altre quantità:
  - I prezzi dei TCN e i tassi a pronti: per $t_i < t_j$ con $t_i,\ t_j \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i, t_j) = \mathrm{e}^{-\sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{1}{t_j - t_i} \sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l),$$

  - I tassi a termine: per $t_i \leq t_j < t_k$, con $t_i,\ t_j,\ t_k \in \mathbb{T}$,

$$f(t_i, t_j, t_k) = \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{l=j}^{k-1} \Delta_l f(t_i, t_l).$$

  - I tassi a pronti e a termine sono medie ponderate dei tassi uniperiodali sui corrispondenti periodi di investimento.
- Definiamo ancora il **tasso a pronti uniperiodale** in $t_i \in \mathbb{T}$ con $t_i < \sup \mathbb{T}$, $r(t_i)$, come

$$r(t_i) = f(t_i, t_i) = r(t_i, t_{i+1}) = -\frac{1}{\Delta_i} \log B(t_i, t_{i+1})$$

cioè $B(t_i, t_{i+1}) = \mathrm{e}^{-\Delta_i \, r(t_i)}$.

Tassi Semplici Uniperiodali

▷ In regime di interesse semplice, si definiscono i corrispondenti tassi semplici uniperiodali a termine:

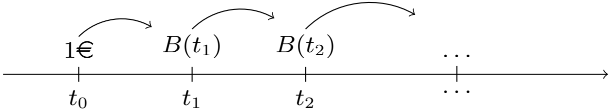
$$\begin{aligned} L_f(t_i, t_j) &= L_f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_j}\left[\frac{B(t_i, t_j)}{B(t_i, t_{j+1})} - 1\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\Delta_j f(t_i, t_j)} - 1}{\Delta_j}, \end{aligned}$$

▷ e quello a pronti:

$$\begin{aligned} L(t_i) = L_f(t_i, t_i) &= L(t_i, t_{i+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{1}{B(t_i, t_{i+1})} - 1\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\Delta_i\ r(t_i)} - 1}{\Delta_i}. \end{aligned}$$

Money Market Instrument

- Chiamiamo **money market instrument** il titolo, il cui prezzo all'epoca t è indicato con $B(t)$, costruito a partire dai TCN di tutte le scadenze mediante la seguente strategia (detta roll-over):
  - in $t_0 = 0$, 1€ viene investito in TCN con scadenza t_1, epoca in cui si riceve l'ammontare $B(t_1) = \mathrm{e}^{\Delta_0\ r(0)}$;
  - ad ogni epoca successiva t_i, l'ammontare $B(t_i)$ viene investito in TCN con scadenza t_{i+1}, epoca in cui si riceve $B(t_i)\mathrm{e}^{\Delta_i\ r(t_i)}$;



- Riassumendo, tale strumento finanziario è tale che il suo prezzo verifica la $B(0) = B(t_0) = 1$ e, per $t_i \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i) = \mathrm{e}^{\sum_{l=0}^{i-1} \Delta_l\ r(t_l)} = \prod_{l=0}^{i-1} \frac{1}{B(t_l, t_{l+1})} = \prod_{l=0}^{i-1} (1 + \Delta_l L(t_l)).$$

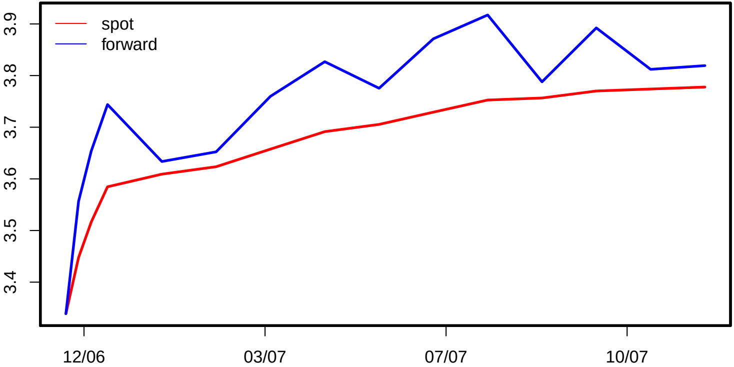
Tassi EURIBOR - t_i=1/12/06

$t_j - t_i$	$L(t_i, t_j)$
1s	3.33
2s	3.45
3s	3.52
1m	3.59
2m	3.62
3m	3.64
4m	3.68
5m	3.72
6m	3.74
7m	3.77
8m	3.79
9m	3.81
10m	3.83
11m	3.84
12m	3.85

Tassi EURIBOR composti - t_i=1/12/06

$t_j - t_i$	$r(t_i, t_j)$	$f(t_i, t_{j-1})$
1s	3.33	3.33
2s	3.45	3.57
3s	3.52	3.65
1m	3.58	3.73
2m	3.61	3.63
3m	3.62	3.66
4m	3.66	3.76
5m	3.69	3.83
6m	3.71	3.77
7m	3.73	3.87
8m	3.74	3.84
9m	3.76	3.86
10m	3.77	3.89
11m	3.77	3.81
12m	3.78	3.82

Tassi a Pronti e a Termine



Scadenzario Continuo

- Nel caso $\mathbb{T} = [0, T]$ oppure $\mathbb{T} = [0, +\infty[$, per $t, s \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < \sup \mathbb{T}$ definiamo il **tasso forward istantaneo** in t per s come (assumendo che il limite esista)

$$f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} f(t, s, u).$$

- Riesce

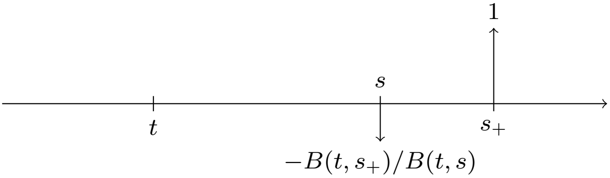
$$\begin{aligned} f(t, s) &= \lim_{u \downarrow s} \left(-\frac{1}{u - s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)} \right) \\ &= -\lim_{u \downarrow s} \frac{\log B(t, u) - \log B(t, s)}{u - s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s) \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)}. \end{aligned}$$

Scadenzario Continuo

- Interpretazione:
  - ‘$f(t,s) = f(t,s,s_+)$’, cioè $f(t,s)$ è il tasso a termine istantaneo concordato in t, per un investimento che inizia in s e finisce un istante dopo (in s_+).
  - Infatti consideriamo l’operazione concordata in t, in cui acquisto un TCN che scade in $s_+ = s + \Delta s$ (con $\Delta s > 0$) e vendo $B(t,s_+)/B(t,s)$ TCN con scadenza s. Il costo in t di tale operazione è 0

$$\frac{B(t,s_+)}{B(t,s)} B(t,s) - B(t,s_+) = 0,$$

per cui la situazione è



Tassi forward istantanei

▷ ⋆ L'interesse generato da tale operazione è

$$\begin{aligned}\text{Montante} - \text{Capitale iniziale} &= 1 - \frac{B(t,s_+)}{B(t,s)} \\ &\cong 1 - \frac{B(t,s) - f(t,s)B(t,s)\Delta s}{B(t,s)} \\ &= f(t,s)\Delta s.\end{aligned}$$

▷ La **struttura dei tassi a termine istantanei** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to f(t,s), \quad t,s \in \mathbb{T}, \; t \leq s < \sup \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine istantanei**.

TASSI FORWARD ISTANTANEI

- Dai tassi istantanei si ricavano tutte le altre quantità.
  - infatti riesce, per $t,\ s \in \mathbb{T}$ con $t < s$,

$$\begin{aligned}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v &= -\int_t^s \frac{\partial}{\partial v} \log B(t,v)\mathrm{d}v \\ &= -[\log B(t,s) - \log B(t,t)] \\ &= -\log B(t,s),\end{aligned}$$

    da cui

$$B(t,s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v}.$$

  - Noti i prezzi si possono trovare anche gli altri tassi in funzione di quelli istantanei.

Tassi forward istantanei

▷ ⋆ Si trova infatti che per $t,\ s \in \mathbb{T}$ con $t < s$

$$\begin{aligned} r(t,s) &= -\frac{1}{s-t}\log B(t,s) \\ &= \frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

⋆ più in generale, per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < u$,

$$\begin{aligned} f(t,s,u) &= \frac{u-t}{u-s}r(t,u) - \frac{s-t}{u-s}r(t,s) \\ &= \frac{1}{u-s}\left(\int_t^u f(t,v)\mathrm{d}v - \int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{1}{u-s}\int_s^u f(t,v)\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

⋆ Quindi i tassi $r(t,s)$ e $f(t,s,u)$ sono le medie dei tassi istantanei sui corrispondenti periodi di investimento.

Tasso a pronti istantaneo

▷ Possiamo ancora definire, per $t \in \mathbb{T}$ con $t < \sup \mathbb{T}$, il **tasso a pronti istantaneo** come

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t,t) \\ &= \lim_{s \downarrow t} r(t,s) \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial s} \log B(t,s)\right]_{s=t} \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)\right]_{s=t} \end{aligned}$$

quindi è il tasso che remunera un investimento che inizia in t e finisce immediatamente dopo (in '$t_+ = t + \Delta t$').

Tasso semplici istantanei

- Se partiamo dai tassi semplici e definiamo in maniera analoga a prima i tassi istantanei

$$L_f(t,s) = \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u), \quad L(t) = L_f(t,t),$$

si trova

$$\begin{aligned} L_f(t,s) &= \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u) \\ &= \lim_{u \downarrow s} \frac{B(t,s) - B(t,u)}{(u-s)B(t,u)} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)}{B(t,s)} \\ &= f(t,s) \end{aligned}$$

e quindi anche $L(t) = r(t)$. I tassi istantanei sono gli stessi in regime di interesse composto e semplice.

Money Market Instrument

- Possiamo infine definire il **money market instrument** o **conto bancario** come il titolo (supposto esistente), il cui prezzo all'epoca t si indica con $B(t)$, costruito a partire dai TCN relativi a tutte le scadenze:
  - si parte con 1€ all'epoca 0;
  - in ogni istante t il valore di questo titolo viene investito in TCN che scadono immediatamente dopo, e così via. Formalmente, il prezzo del titolo verifica

$$\begin{cases} B(0) = 1 \\ \mathrm{d}B(t) = B(t)r(t)\mathrm{d}t, \end{cases}$$

  - quindi si trova

$$B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(v)\mathrm{d}v}.$$

STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

- all'istante di valutazione $t = 0$ conosciamo la struttura per scadenza corrente ma non evidentemente la sua evoluzione futura, cioè $B(s,u)$ (e quindi $r(s,u)$, $r(s)$, $B(s)$, $\dots$) con $0 < s \leq u$ sono variabili aleatorie.
- se assumiamo che le varie quantità $B(s,u)$ siano in realtà **deterministiche** (non aleatorie) allora, in assenza di opportunità di arbitraggio, le seguenti proprietà equivalenti devono sussistere
  1. $B(t,u) = B(t,s)B(s,u)$ per ogni $t \leq s \leq u$
  2. $f(t,s,u) = r(s,u)$ per ogni $t \leq s < u$
  3. $f(t,s) = r(s)$ per ogni $t < s$
  4. $B(t,s) = \frac{B(t)}{B(s)}$

  e quindi

  $$B(t,s) = \mathrm{e}^{-\sum_{t \leq t_j < s} \Delta_j r(t_j)}$$

  nel caso di scadenzario discreto, mentre nel caso di scadenzario continuo

  $$B(t,s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s r(v)\mathrm{d}v}$$

STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

▷ che la (1) (o la (2)) segue dall'assenza di arbitraggi è immediato essendo $B(s,u)$ (o $r(s,u)$) noto in $t<s$ e quindi deve essere

$$B(t,u)=B(t,s)B(s,u)=B(t,s)\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

cioè l'attualizzazione tra s e u avviene al tasso $r(s,u)$ o $f(t,s,u)$, che devono quindi coincidere.
la (2) implica la (3), basta prendere $u=s+$ nel caso di scadenzario discreto e $\lim_{u\downarrow s}$ in caso di scadenzario continuo.
la (4) segue poi dalla (3), essendo ad esempio nel caso di scadenzario continuo

$$B(t,s)=\mathrm{e}^{-\int_t^s f(t,u)\mathrm{d}u}=\mathrm{e}^{-\int_t^s r(u)\mathrm{d}u}=\frac{B(t)}{B(s)}$$

per finire, è subito visto che la (4) implica la (1):

$$B(t,u)=\frac{B(t)}{B(u)}=\frac{B(t)}{B(s)}\frac{B(s)}{B(u)}=B(t,s)B(s,u).$$

Un Modello Parametrico: Nelson-Siegel (1987)

- $\mathbb{T} = [0, \infty[$.
  - Fissiamo $t \geq 0$; il modello specifica la forma dei tassi forward istantanei all'epoca t per ogni scadenza successiva:

$$f(t,s) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-(s-t)/a} + \beta_2 \frac{s-t}{a} \mathrm{e}^{-(s-t)/a},$$

    con $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Il modello dipende da 4 parametri.
  - $f(t,s)$ dipende solo dall'ampiezza del periodo $s - t$. Nel seguito possiamo allora considerare $t = 0$:

$$f(0,t) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a}.$$

- Questo modello e sue varianti vengono usato frequentemente per descrivere e/o stimare la curva dei tassi.
- https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

. . . Nelson-Siegel

▷ Deriviamo le altre quantità:

⋆ i tassi a pronti sono dati da

$$r(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(0,u)\mathrm{d}u = \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\frac{1-\mathrm{e}^{-t/a}}{t/a} - \beta_2\mathrm{e}^{-t/a}.$$

⋆ Più in generale, i tassi forward per l'intervallo $[s,u]$ sono

$$f(0,s,u) = \frac{1}{u-s}\int_s^u f(0,v)\mathrm{d}v = \beta_0 + \frac{\beta_1+\beta_2}{(u-s)/a}\left(\mathrm{e}^{-s/a} - \mathrm{e}^{-u/a}\right) + \frac{\beta_2}{u-s}\left(s\mathrm{e}^{-s/a} - u\mathrm{e}^{-u/a}\right).$$

. . . Nelson-Siegel

- ⋆ Infine, i prezzi dei TCN (la 'discount function') sono

$$\begin{aligned} B(0,t) &= \mathrm{e}^{-t\, r(0,t)} \\ &= \mathrm{e}^{-t\beta_0-(\beta_1+\beta_2)a(1-\mathrm{e}^{-t/a})+\beta_2 t\mathrm{e}^{-t/a}} \end{aligned}$$

- Osserviamo che, fissato a, i tassi (a pronti o a termine) dipendono da $\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2$ in maniera lineare $\Rightarrow$ regressione lineare può essere usata per stimare i parametri (con a fissato).
- Interpretazione dei parametri:
  - ⋆ $f(0,t)$ è somma di tre componenti:

$$f(0,t) = c_1(t) + c_2(t) + c_3(t),$$

con

$$c_1(t) = \beta_0,\ c_2(t) = \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a},\ c_3(t) = \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a}.$$

. . . Nelson-Siegel

- Riesce
  - c_1 è costante: $\lim_{t\to 0} c_1(t) = \lim_{t\to\infty} c_1(t) = \beta_0$;
  - c_2 è monotona decrescente se $\beta_1 > 0$, crescente se $\beta_1 < 0$, (costante se $\beta_1 = 0$).
    Inoltre $\lim_{t\to 0} c_2(t) = c_2(0) = \beta_1$ e $\lim_{t\to\infty} c_2(t) = 0$.
  - Se $\beta_2 = 0$, $c_3(t)$ è costante. Se $\beta_2 > 0$, c_3 cresce fino a $t^* = a$ e poi decresce (t^* è punto di massimo assoluto). Se invece $\beta_2 < 0$, c_3 decresce fino a t^* e poi è crescente (t^* punto di minimo assoluto). Inoltre riesce $\lim_{t\to 0} c_3(t) = \lim_{t\to\infty} c_3(t) = 0$.
- Di conseguenza, si può interpretare
  - c_1 come componente di lungo termine (è l'unica che ha limite non nullo in ∞),
  - c_2 come componente di breve termine (il limite in 0 è non nullo)
  - e c_3 come componente di medio periodo (ha limite 0 sia in 0 che in ∞).

. . . Nelson-Siegel

- Osserviamo ancora che
  - ⋆ Il tasso istantaneo per una scadenza 'infinita' è

$$f(0,\infty) = \lim_{t\to\infty} f(0,t) = \beta_0.$$

  - ⋆ Il tasso istantaneo a pronti ('spot rate') è

$$r(0) = f(0,0) = r(0,0) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \beta_0 + \beta_1.$$

  - ⋆ Il parametro a è un parametro di posizione: non cambia il 'tipo di andamento' della curva dei tassi, ma la 'comprime' (se a piccolo) o 'allunga' (se a grande) infatti, è $f(0,t;a) = f(0,kt;ka)$.
- Per $r(0,t)$ si possono fare le stesse osservazioni che per $f(0,t)$. In particolare $r(0,\infty) = \beta_0$, $r(0,0) = r(0) = \beta_0 + \beta_1$, e le forme di $s \to r(t,s)$ possono essere costanti, monotone o campanulari.
- In **R**: pacchetti **fBonds**, **NMOF**, **YieldCurve**, **termstrc**

. . . Nelson-Siegel

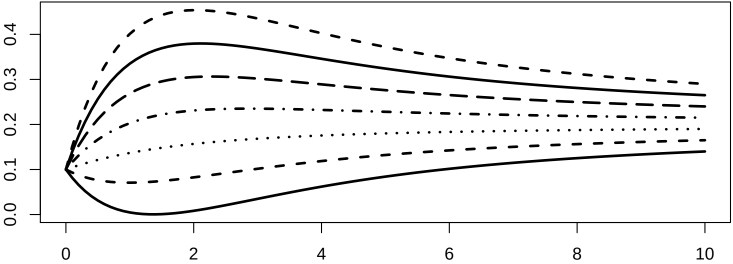


Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,$
$\beta_2 = -0.5,\ -0.25,\ 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$

. . . Nelson-Siegel

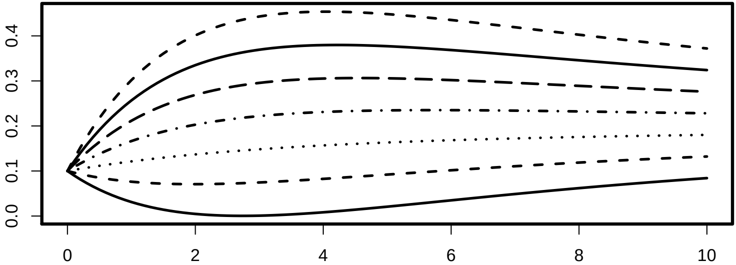


Figura: $r(0,t)$: $a = 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,$
$\beta_2 = -0.5,\ -0.25,\ 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$

. . . Nelson-Siegel

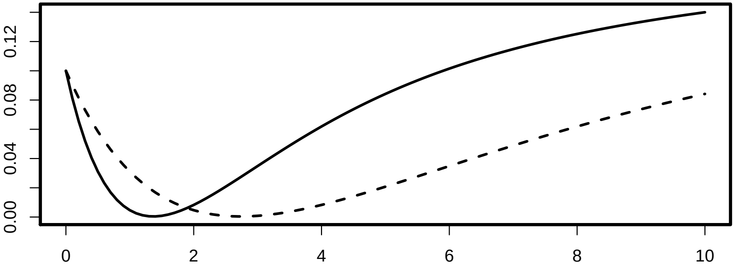


Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,\ \beta_2 = -0.5$

... Nelson-Siegel

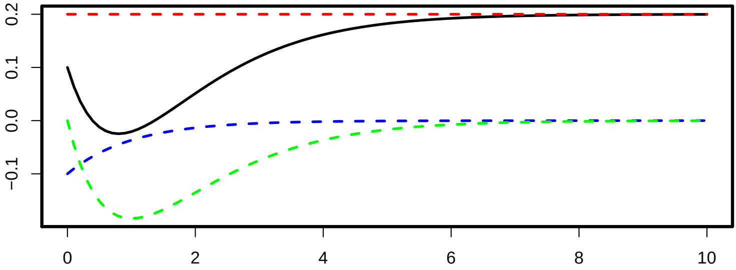


Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,\ \beta_2 = -0.5$

Proprietà Empiriche della Curva dei Tassi

- Le curve dei tassi che si osservano in pratica rientrano fra le seguenti forme:
  - **piatta** (flat);
  - **crescente** (normale);
  - **decrescente** (invertita);
  - **campanulare** (humped);
  - **a S** o a cucchiaio.
- La famiglia di curve dei tassi del tipo Nelson-Siegel cattura le prime 4 forme.
- Al fine di riprodurre anche l'ultima forma, sono state proposte alcune estensioni di Nelson-Siegel, in particolare il modello di Svensson:

$$f(0,t) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_3 \frac{t}{a_1} \mathrm{e}^{-t/a_1}.$$

Valore di un Flusso di Cassa

- Data la struttura per scadenza dei tassi ad un'epoca $t \in \mathbb{T}$, deriviamo il prezzo di un titolo che paga flussi pari a $I_h \geq 0$ in t_h, $h = 1, \ldots, n$, con $t < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Indicato con P tale prezzo, deve essere

$$P = \sum_{h=1}^{n} I_h B(t, t_h) = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t,t_h)(t_h - t)}.$$

- Infatti la strategia in cui acquisto in t la quantità I_h di TCN con scadenza t_h ($h = 1, \ldots, n$) produce gli stessi flussi di cassa del titolo in questione, quindi per la legge del prezzo unico il prezzo del titolo deve essere uguale al valore della strategia.
- Il valore del flusso dipende quindi inversamente da un certo numero di punti sulla curva dei tassi (**'fattori di rischio'**).

Yield to Maturity

- L'Yield to Maturity (YTM, Redemption Yield, Rendimento a Scadenza) è **il tasso interno di rendimento** (supposto esistente) r dell'operazione in cui si paga P in t e si riceve la sequenza di flussi I_h in t_h, $h = 1, \ldots, n$:

$$P = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t,t_h)(t_h-t)} = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t_h-t)}.$$

- Si tratta quindi di un valore che sintetizza (una 'media') i tassi $r(t, t_h)$, $h = 1, \ldots, n$ e quindi verifica

$$\min_h r(t, t_h) \leq r \leq \max_h r(t, t_h).$$

- Per un TCN che scade in $t_n = s$, riesce $r = r(t, s)$.

. . . Yield to Maturity

- Ipotesi sottostante l'YTM è che
  - si detenga il titolo fino a scadenza.
  - si possa reinvestire al tasso r fino all'ultima epoca ogni cash-flow ricevuto.

  Infatti, dalla definizione di YTM si deduce che

$$P\mathrm{e}^{r(t_n - t)} = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{r(t_n - t_h)}.$$

- Difetto del YTM è quindi l'assumere una struttura per scadenza piatta dei tassi e trascurare di conseguenza il rischio di reinvestimento.
- Tuttavia l'YTM è comunemente usato come misura del rendimento di un'obbligazione.
- Se si ragiona in termini di tassi invece che di intensità, indicato con i il tasso interno di rendimento, la relazione è $i = \mathrm{e}^r - 1$.

... Coupon Bond

- Nel caso di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \dots, n-1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h\Delta$ per $h = 1, \dots, n$.
- Il coupon bond **quota alla pari** (sotto, sopra) se e solo se l'YTM (tasso su base periodale) $i_\Delta = (1+i)^\Delta - 1$ coincide (è maggiore, minore) con il tasso cedolare I/C.
  - Riesce infatti, ponendo $v = (1+i)^{-\Delta} = (1+i_\Delta)^{-1}$,

$$\begin{aligned} P &= I \sum_{h=1}^{n} (1+i)^{-h\Delta} + C(1+i)^{-n\Delta} \\ &= (1-v^n)\left(I \frac{v}{1-v} - C\right) + C. \end{aligned}$$

  - Quindi $P = C$ se e solo se $I/C = (1-v)/v$ e quindi se e solo se $i_\Delta = I/C$.
- Ad esempio, un bond con cedole annuali pari a 3%, nominale 100 e scadenza 10 anni quota alla pari (sotto, sopra) se e solo se l'YTM è $i = 3\%$ ($>, <$) ($r = 2.96\%$).

Par Rate

- Si chiama **par rate** (par yield, tasso di parità) relativo ad una certa scadenza t_n e frequenza Δ il tasso nominale c tale che la corrispondente obbligazione con nominale $C = 100$, che paga cedole $I = c\Delta 100$ in $t_h = t + h\Delta$, quota alla pari.
- In altri termini il tasso cedolare $c\,\Delta$ è il YTM su base periodale dell'obbligazione.
- Data la struttura per scadenza dei tassi, deve essere

$$100 = I \sum_{i=1}^{n} B(t, t_i) + 100 B(t, t_n),$$

da cui si ricava

$$c \equiv c(t, n) = \frac{1 - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t, t_h)}.$$

- Per $t \in \mathbb{T}$ fissato, la **struttura per scadenza dei par rate** è

$$n \to c(t, n); \;\; n \geq 1.$$

Il suo grafico è la curva dei par rates.

Par Rate

- Riesce (ponendo $t_0 = t$)
  - $$\begin{aligned} c(t,n) &= \frac{1 - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} \frac{B(t,t_{j-1}) - B(t,t_j)}{\Delta B(t,t_j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} L_f(t,t_{j-1},t_j). \end{aligned}$$
  - Quindi il par rate è una media pesata dei tassi a termine semplici; è allora

$$\min_i L_f(t,t_{i-1},t_i) \le c(t,n) \le \max_i L_f(t,t_{i-1},t_i).$$

Par Rate

- Dall'espressione dei par rate come media pesata, si ottiene inoltre che il par rate è une media pesata del par rate precedente e del tasso semplice e a termine corrente

$$c(t, n+1) = \alpha c(t, n) + (1-\alpha) L_f(t, t_n, t_{n+1}), \quad \alpha = \frac{\sum_{h=1}^{n} B(t, t_h)}{\sum_{h=1}^{n+1} B(t, t_h)},$$

- quindi se la struttura per scadenza dei par rates è crescente (decrescente) allora sono dominati dai (dominano i) tassi a termine corrispondenti.

... Yield to Maturity

- È comune ragionare in termini di prezzo di un titolo come funzione (decrescente) dell'YTM:

$$P \equiv P(r) = \sum_{h=1}^{n} I_h e^{-r(t_h - t)}.$$

- Come si comporta P al variare di r?
  - $$P'(r) = -\sum_{h=1}^{n} I_h (t_h - t) e^{-r(t_h - t)} < 0$$
    $$P''(r) = \sum_{h=1}^{n} I_h (t_h - t)^2 e^{-r(t_h - t)} > 0$$
  - Quindi P è funzione **decrescente convessa** dell'YTM. Al crescere del YTM il prezzo decresce con tassi marginali decrescenti
  - Essendo P continua e $\lim_{r \to \infty} P(r) = 0$ e $P(0) = \sum_h I_h$ si deduce che l'YTM esiste unico se $0 < P < \sum_h I_h$.

. . . Yield to Maturity

▷ ⋆ La convessità implica che una variazione positiva dell'YTM comporta una variazione (negativa) del prezzo in valore assoluto minore della variazione (positiva) corrispondente ad un uguale variazione di segno negativo dell'YTM:

$$P(r) - P(r + \Delta r) < P(r - \Delta r) - P(r).$$

⋆ Dividendo per $P(r)$, lo stesso risultato si applica alle variazioni percentuali (variazioni/prezzo):

$$\frac{P(r) - P(r + \Delta r)}{P(r)} < \frac{P(r - \Delta r) - P(r)}{P(r)}.$$

Duration (Macaulay, 1938)

- Per calcolare approssimativamente l'entità delle variazioni assolute e percentuali del prezzo si introducono le seguenti quantità: la DOLLAR DURATION, $\$D$ e la DURATION D, definite da

$$\$D = -P'(r), \quad D = -\frac{P'(r)}{P(r)} = -(\log P(r))'$$

- La prima **approssima** la variazione di P, la seconda la sua variazione percentuale, quando il YTM varia di una quantità 'piccola' Δr:

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \cong P'(r)\Delta r = -\$D\ \Delta r,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{P(r)} \cong \frac{P'(r)\Delta r}{P(r)} = -D\ \Delta r$$

. . . Duration

- La Duration può essere interpretata come media temporale:

$$
\begin{aligned}
D &= -\frac{P'(r)}{P(r)} \\
&= \frac{\sum_{h=1}^{n} I_h (t_h - t) \mathrm{e}^{-r(t_h - t)}}{P(r)} \\
&= \sum_{h=1}^{n} w_h (t_h - t),
\end{aligned}
$$

  con $w_h = I_h \mathrm{e}^{-r(t_h - t)} / P(r)$.
- Si tratta quindi della media delle vite a scadenza dei flussi pesate con i flussi scontati usando l'YTM.
- Riesce quindi

$$
t_1 - t \leq D \leq t_n - t,
$$

  e l'uguaglianza vale se e solo se c'è una sola scadenza. Quindi per un TCN la duration coincide con la vita a scadenza.

Convexity

- L'approssimazione 'del primo ordine' che si ottiene con la duration può essere migliorata considerando un termine di 'secondo ordine';
  - questo corrisponde ad approssimare con un polinomio di secondo grado (parabola) piuttosto che di primo grado (retta).
  - Si ha allora

$$\Delta P(r) \cong -\$D \, \Delta r + \frac{1}{2}\$Conv \, (\Delta r)^2,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \cong -D \, \Delta r + \frac{1}{2}Conv \, (\Delta r)^2.$$

  - $Conv = P''(r)/P(r)$ è la Convexity e $\$Conv = P''(r)$ è la Dollar Convexity.
- La convexity è il momento secondo (ponderato) delle vite a scadenza:

$$Conv = \sum_{h=1}^{n} w_h (t_h - t)^2.$$

. . . Duration

- Se ragioniamo in termini di tasso i piuttosto che di intensità r, essendo il legame $r = \log(1+i)$, possiamo introdurre la funzione

$$\overline{P}(i) = P(\log(1+i)) = \sum_{h=1}^{n} I_h (1+i)^{-(t_h - t)}.$$

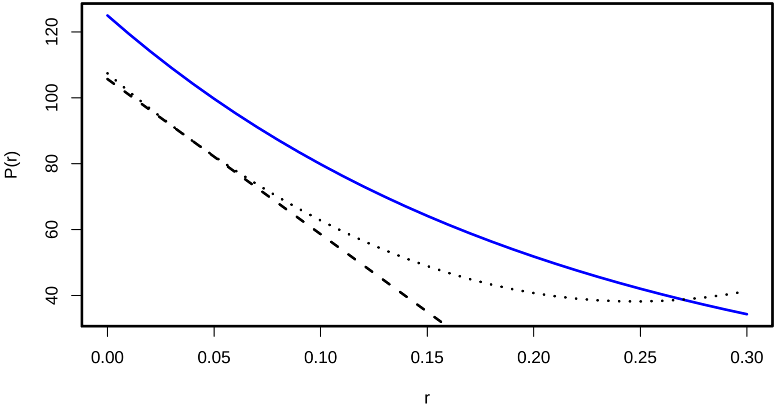
- Riesce allora
  - ⋆
$$\overline{P}'(i) = \frac{P'(\log(1+i))}{1+i} = -\frac{\$D}{1+i}, \quad \frac{\overline{P}'(i)}{\overline{P}(i)} = -\frac{D}{1+i} = -\,\mathrm{MD},$$
  - ⋆ dove $\mathrm{MD} = \frac{D}{1+i}$ è la Duration modificata.
  - ⋆ Al fine di approssimare una variazione percentuale piccola Δi nel tasso, si utilizza
$$\frac{\Delta \overline{P}(i)}{\overline{P}(i)} \cong -\,\mathrm{MD}\ \Delta i$$
- Al secondo ordine: $\overline{P}''(i)/\overline{P}(i) = (Conv + D)/(1+i)^2$.

. . . Duration

▷ Esempio: coupon bond, cedole semestrali, scadenza 5 anni, cedole 2.5%, $P = 87.23$, YTM r=8% (i=8.33%, i_2=4.08%), duration e convexity $D = 4.44$, $Conv = 21.23$.

Δr (b.p.)	ΔP	$\$D$	$\$D\,\&\,\$Conv$	$\Delta P/P$ (%)	D	$D\,\&\,Conv$
−400	17.08	15.49	16.98	19.58	17.76	19.46
−300	12.50	11.62	12.45	14.33	13.32	14.28
−200	8.13	7.75	8.12	9.32	8.88	9.31
−100	3.97	3.87	3.97	4.55	4.44	4.55
−80	3.16	3.10	3.16	3.62	3.55	3.62
−60	2.36	2.32	2.36	2.70	2.66	2.70
−40	1.56	1.55	1.56	1.79	1.78	1.79
−20	0.78	0.77	0.78	0.89	0.89	0.89
20	−0.77	−0.77	−0.77	−0.88	−0.89	−0.88
40	−1.53	−1.55	−1.53	−1.76	−1.78	−1.76
60	−2.29	−2.32	−2.29	−2.63	−2.66	−2.63
80	−3.04	−3.10	−3.04	−3.49	−3.55	−3.48
100	−3.78	−3.87	−3.78	−4.34	−4.44	−4.33
200	−7.39	−7.75	−7.38	−8.47	−8.88	−8.46
300	−10.83	−11.62	−10.79	−12.41	−13.32	−12.37
400	−14.11	−15.49	−14.01	−16.17	−17.76	−16.07

...Duration



Duration di un Coupon Bond

- Nel caso specifico di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \ldots, n-1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h$ per $h = 1, \ldots, n$ (senza perdita di generalità abbiamo preso $\Delta = 1$, cioè cedole annuali).
- La duration è funzione decrescente del tasso cedolare I/C: al crescere della cedola diminuisce il peso del rimborso a scadenza

$$\frac{\partial D}{\partial (I/C)} < 0.$$

- La duration è funzione decrescente del tasso di rendimento

$$\frac{\partial D}{\partial r} < 0,$$

un incremento del tasso di rendimento penalizza più le scadenze più lontane

... Duration di un Coupon Bond

- All'aumentare del numero di cedole, il comportamento della duration non è sempre monotono: è crescente se $i \leq \frac{I}{C}$ (bond quota alla pari o sopra la pari), mentre è prima crescente poi decrescente se $i > \frac{I}{C}$ (bond quota sotto la pari).
- Indicata con D_n la duration per il titolo con n cedole, e P_n il prezzo corrispondente, è

$$P_{n+1} = P_n + Iv^{n+1} - Cv^n(1-v),$$

$$D_{n+1} = \frac{D_n P_n + I(n+1)v^{n+1} - Cnv^n(1-v) + Cv^{n+1}}{P_{n+1}}$$

$$D_{n+1} - D_n = \frac{v^n}{P_{n+1}}\left[(n - D_n)(\alpha - 1) + \alpha\right]$$

con $\alpha = \left(\frac{I}{C} + 1\right) v > 0$. Quindi se $\alpha \geq 1$ (caso $i \leq \frac{I}{C}$) è D_n crescente con n, se $\alpha < 1$ è $D_{n+1} > D_n$ se e solo se $n < D_n + \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

... Duration di un Coupon Bond

- In ogni caso D_n converge verso un valore limite; sfruttando le

$$\sum_{h=1}^{n} v^h = v\frac{1-v^n}{1-v}, \; \sum_{h=1}^{n} hv^h = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^n}{1-v} - nv^n\right),$$

si ottiene

$$D_n = \frac{nv^n\left(1 - \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\right) + \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\frac{1-v^n}{1-v}}{\frac{I}{C}\frac{v}{1-v}(1-v^n) + v^n}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = \frac{1+i}{i},$$

che è la duration di una rendita perpetua.

... Duration di un Coupon Bond

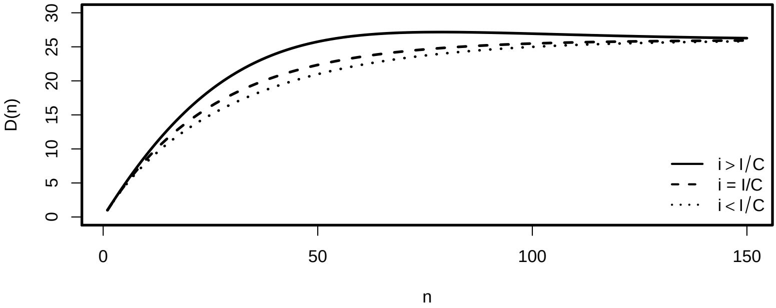


Figura: $C = 100,\ i = 4\%,\ I = 2,\ 4,\ 6.$