STUDIO ATTORNO AI PTI DI EQUILIBRIO

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$$

Ci interessa come si comporta $\bar{x}(t)$ quando la traiettoria è in prossimità del pto di equil. $\bar{c}$
($t.c.$ $\bar{f}(\bar{c}) = 0$)

$$f_i(\bar{x}) = \underset{\overset{\|}{0}}{f_i(\bar{c})} + \sum_j \underbrace{\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{c}}}_{\equiv A_{ij}} (x_j - c_j) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2)$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + \dots$$

$\bar{f}$ è ben approssimata da questa funzione lineare.

Se $\bar{x}(t)$ è vicina a $\bar{c}$

$$\bar{f}(\bar{x}(t)) \approx A \cdot (\bar{x}(t) - \bar{c})$$

$$\dot{\bar{x}}(t) \simeq A(\bar{x}(t) - \bar{c})$$

$$\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{c}$$

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = A\,\bar{\xi}(t) + O(\|\xi\|^2) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\hookrightarrow \bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{c}$$

$\dot{\xi} = A\,\xi \quad (*) \rightarrow$ eq. lineare del 1° ord. <u>omogenea</u> $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ soluz. generale sarà comb. lineare di n soluz. particolari.

Cerchiamo soluz. partic. della forma

$$\xi(t) = \underline{\tau(t)} \cdot \bar{u} \qquad \bar{u} \in \mathbb{R}^n \qquad (\star)$$

Ci interessano soluz. non-banali $\Rightarrow \xi(t)$ non si annulla mai.

[$\exists$ soluz. t.c. $\xi(0) = 0 \rightsquigarrow \xi(t) = 0 \ \forall t$
$\Rightarrow$ le altre traiettorie non possono passare per $\xi = 0$, per il teorema di esist. e unic.]

Sostituiamo $(\star)$ in $(*)$

$$\underline{\underline{\dot{\tau}(t) \cdot \bar{u}}} = A\big(\tau(t)\,\bar{u}\big) = \underline{\underline{\tau(t) \cdot A\bar{u}}}$$

uguaglianza è possibile solo se $\bar{u}$ e $A\bar{u}$ sono vettori paralleli

$$\rightsquigarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \boxed{A\bar{u} = \lambda \bar{u}} \qquad (\circ)$$

In tal caso

$$\rightsquigarrow \dot{\tau}(t) = \lambda\, \tau(t)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = C\, e^{\lambda t} \qquad C = \tau(0)$$

(∘) ci dice che $\bar{u}$ è un AUTOVETTORE di A
con AUTOVALORE λ.

Prop. Eq. lin. $\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi}$ ha soluz. particolari
$$\xi(t) = C e^{\lambda t} \cdot \bar{u}$$
dove $\bar{u}$ è autov. di A con autov. λ.

Per risolvere eq. lin.: diagonalizzare A (trovare
autoval. e autov.)

Se A è diag. ($\exists$ base di autovett.),
allora ci sono n soluz. indip. e la
soluz. generale sarà

autov.
$$\bar{\xi}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j t} \bar{u}_j$$
base autovett.

SISTEMI MECCANICI UNIDIM. (1 grado di lib.)

- $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ $\swarrow$

- Ci concentreremo su sist. con $F = F(x)$ $\rightsquigarrow$

  $v = \dot{x}$

  $\rightsquigarrow$ si conserva l'energia

$$E(x,v) = \underbrace{T(v)}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

è una cost. del moto

$$E(x(t), v(t)) = E \quad \underline{\text{cost.}}$$

- Traiettorie giacciono sulle curve di livello

$$E(x,v) = E$$

$\Rightarrow$ determinano la traiettoria

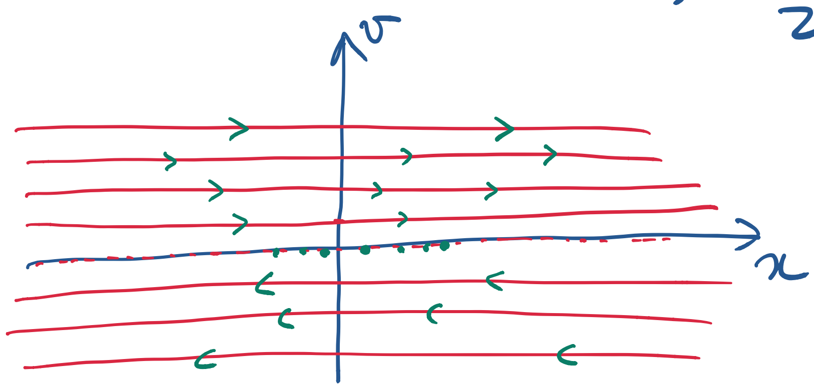
Es) 1) PART. LIBERA

$\ddot{x} = 0$ $\qquad E(x,v) = \dfrac{mv^2}{2}$ $\rightsquigarrow$ curve livello:

$E(x,v) = \text{cost.}$

$\Downarrow$

$v = \text{cost.}$



$v = \dot{x}$

$v > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0 \Rightarrow$

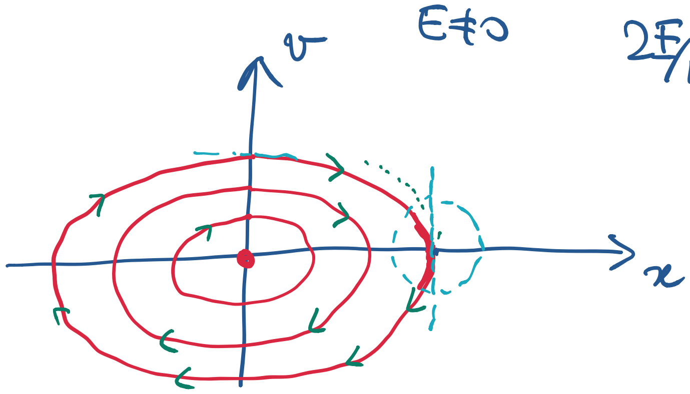
$\Rightarrow x$ cresce col t

2) OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = \underline{-\omega^2 x} \qquad V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$E(x,v) \equiv \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$E(x,v) = E \xrightarrow[E\neq 0]{} \frac{v^2}{2E/m} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \qquad \text{ELLISSE}$$



$E=0$: curva livello

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (x,v) = (0,0)$$

curva degenera a un PUNTO

Traiettorie giacciono sulle curve di livello.

→ Nel semipiano superiore (del piano (x,v)) le frecce vanno verso destra; nel semipiano inferiore vanno verso sinistra.

→ Traiettoria attraversa verticalm. l'asse delle ascisse (se il pto di intersez. NON è pto di equil.):

[Tangente a una curva $y = f(x)$ nel piano (x,y) in un pto x_0

$$y = mx + q \qquad \text{dove} \qquad m = f'(x_0)$$

una retta verticale ha pendenza m infinita]

La nostra curva nel punto (x, v) ha eq.

$$v = v(x)$$

$$m = \frac{dv(x_0)}{dx} = \frac{\overset{\overset{\dot{v}}{\shortparallel}}{dv(t)}}{dt} \cdot \Bigg(\frac{\overset{\overset{\dot{x}=v}{\shortparallel}}{dx}}{dt} \Bigg)^{-1} = \frac{f(x_0)}{v(x_0)}$$

x_0 è pto di attraversam. dell'asse delle ascisse.

$\Rightarrow$ se x_0 non è un pto eq. (cioè $f(x_0) \neq 0$)

allora per $v \to 0$, $m \to \infty$ //

ANALISI QUALITATIVA

$$E(x, v) = \boxed{T(v) + V(x) = \underset{\text{cost.}}{E}}$$

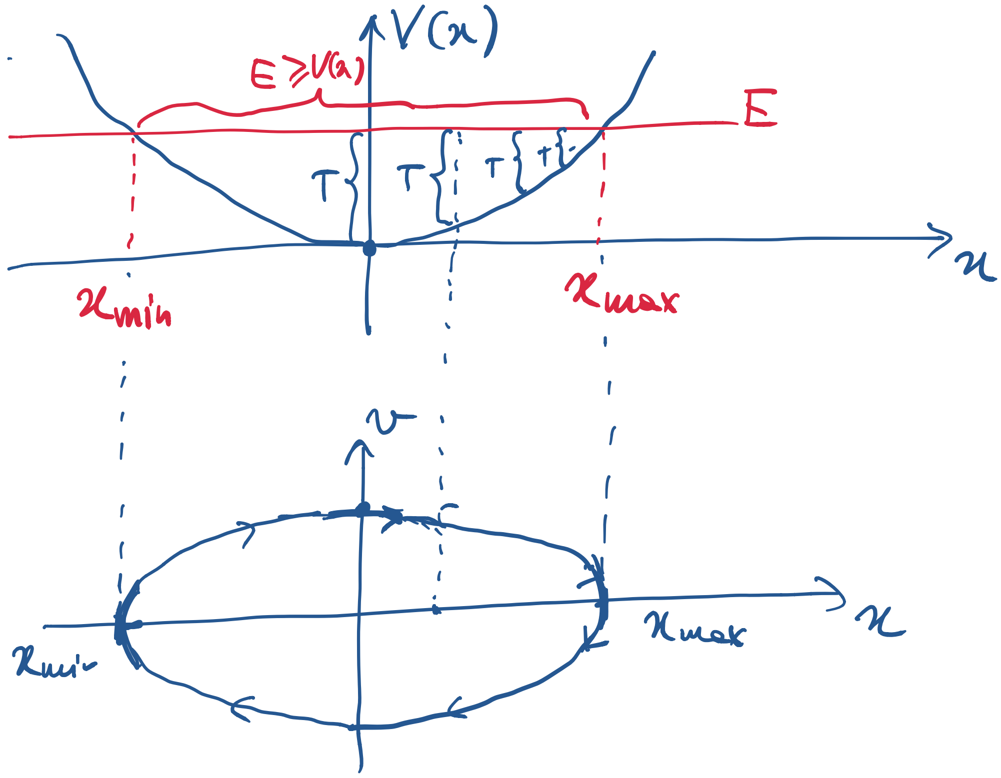
- $T(v) = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad E - V(x) \geq 0 \quad (\ddagger)$$

$\Rightarrow$ un pto x può stare su una curva di livello (essere un pto permesso, cioè un pto in cui ci può passare una traiettoria) se x soddisfa $(\ddagger)$ $\quad V(x) \leq E$

osc. arm.

$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$



$$x(t) \in \{ x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq E \}$$

Per osc. arm. $\quad \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \leq E \to x^2 \leq \frac{2E}{m\omega^2}$

$$\to x(t) \in \left[\underbrace{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{= x_{min}}, \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{= x_{max}} \right]$$

- Nei pti in cui $V(x) = E$ $\quad$ (x_{min} & x_{max} per osc. arm.)

$$\Rightarrow T = 0 \Rightarrow v = 0$$

pti per cui $V(x) = E$ sono detti

PUNTI D' INVERSIONE

$$\ddot{x} = f(x) = -\frac{1}{m} V'(x) \neq 0$$

$\uparrow$ x_{min}, x_{max} che non siano pti eq.

$E > 0$

$x = 0$: $V(x) = 0 \Rightarrow T = E \neq 0 \qquad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

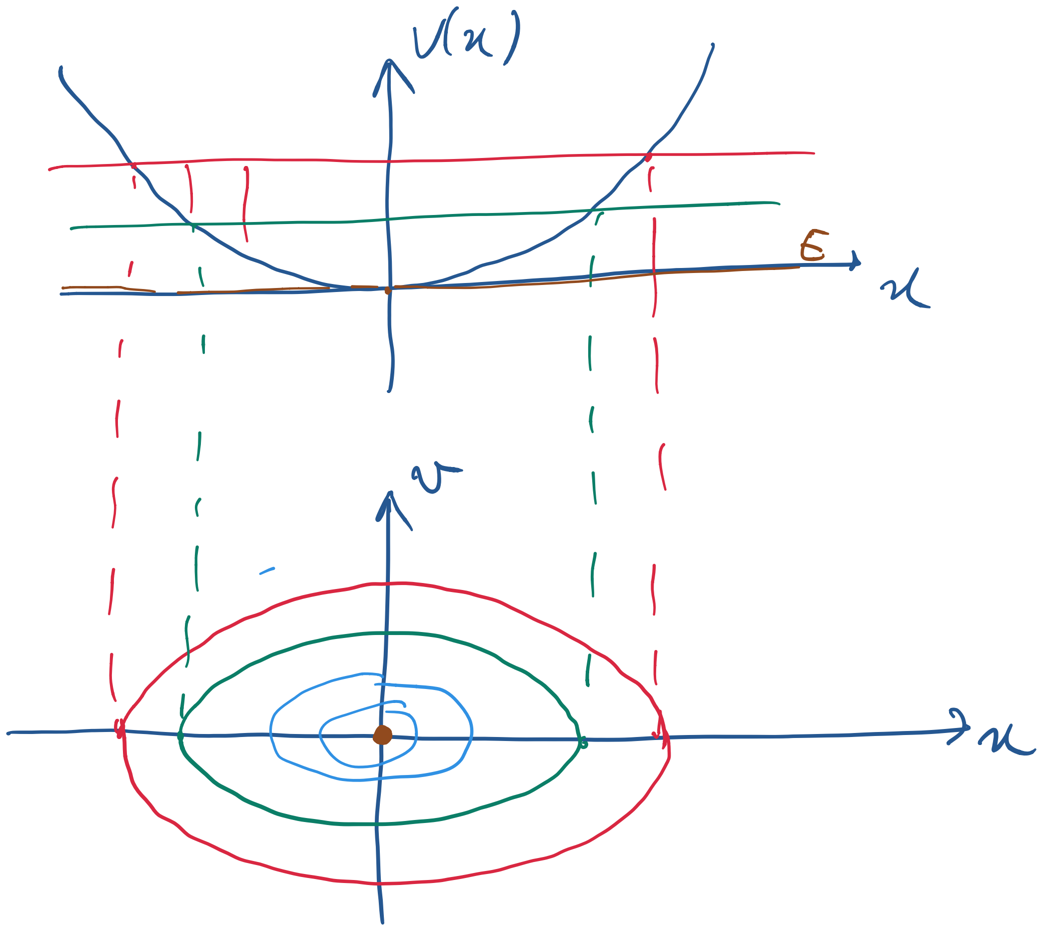
$V'(x) = 0 \quad (V''(x) \neq 0)$

$v \neq 0 \Rightarrow$ corpo si muove, verso destra $v > 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v} \underset{x=0}{=} \underset{v \neq 0}{\frac{0}{}} = 0$$

Il moto risulta essere periodico.

$\Rightarrow$ traiettoria si può ottenere (qualitativam.) semplicem. dal grafico di $V(x)$.



Per $E = 0$, l'unico pto per cui $V(x) \leq E$, è $x = 0$ ⇝ pt equil.

ES. Repuls. armonico

$\ddot{x} = \omega^2 x \qquad E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

→ curve di livello $E \neq 0$

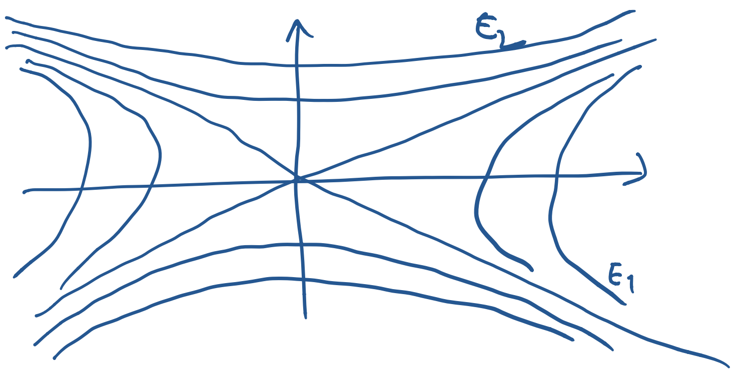
$$\frac{v^2}{2E/m} - \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \qquad \text{IPERBOLE}$$

→ per $E = 0$

$$v^2 - \omega^2 x^2 = 0$$

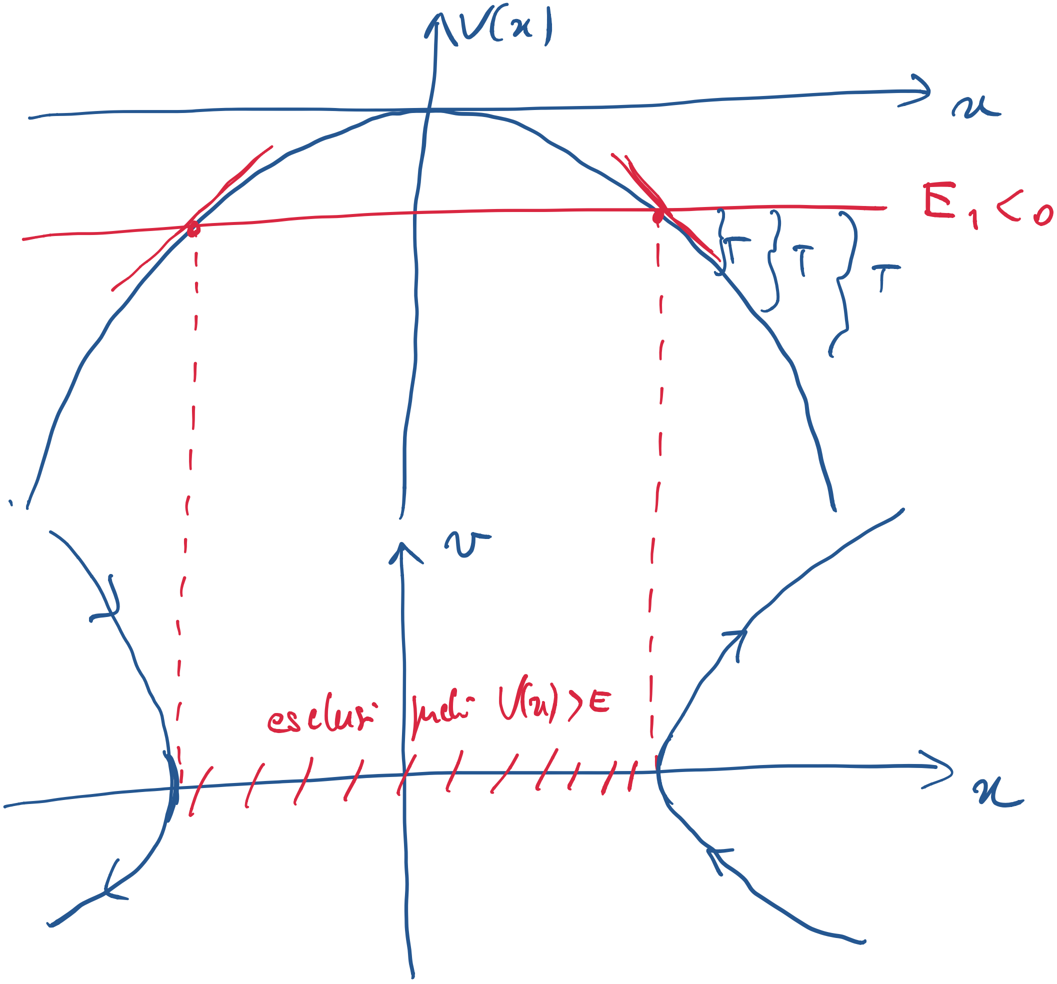
$$(v - \omega x)(v + \omega x) = 0$$

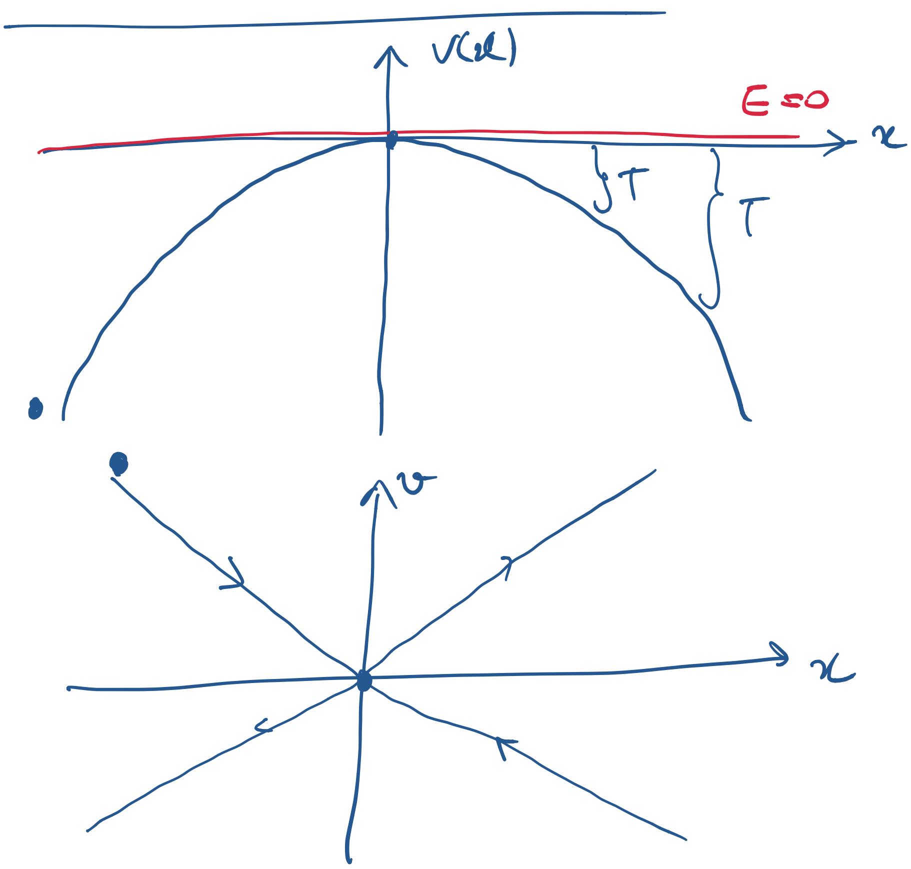
→ unione di due RETTE



curve di livello
Rep. arm.

$V(x) = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$

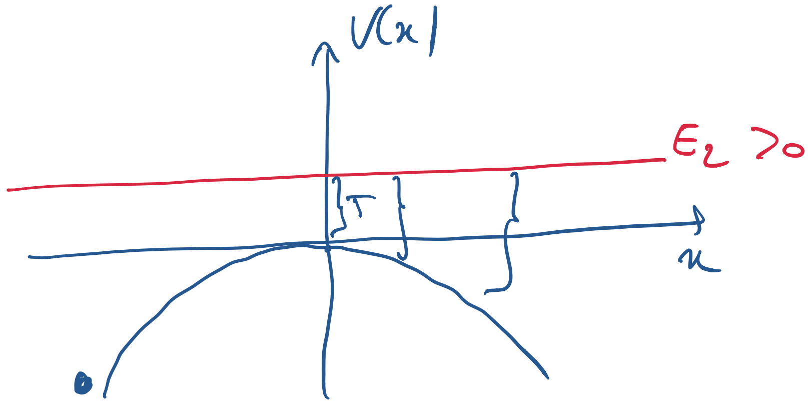


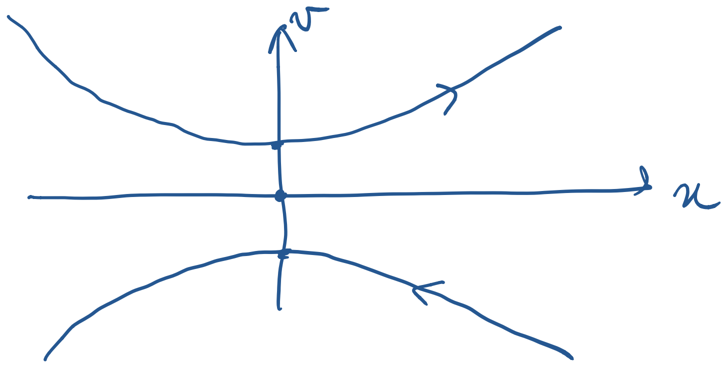


tutti i punti x sono permessi (perché $E - V(x) \geq 0 \;\; \forall x$)

$(x, v) = (0,0)$ è punto di equilibrio

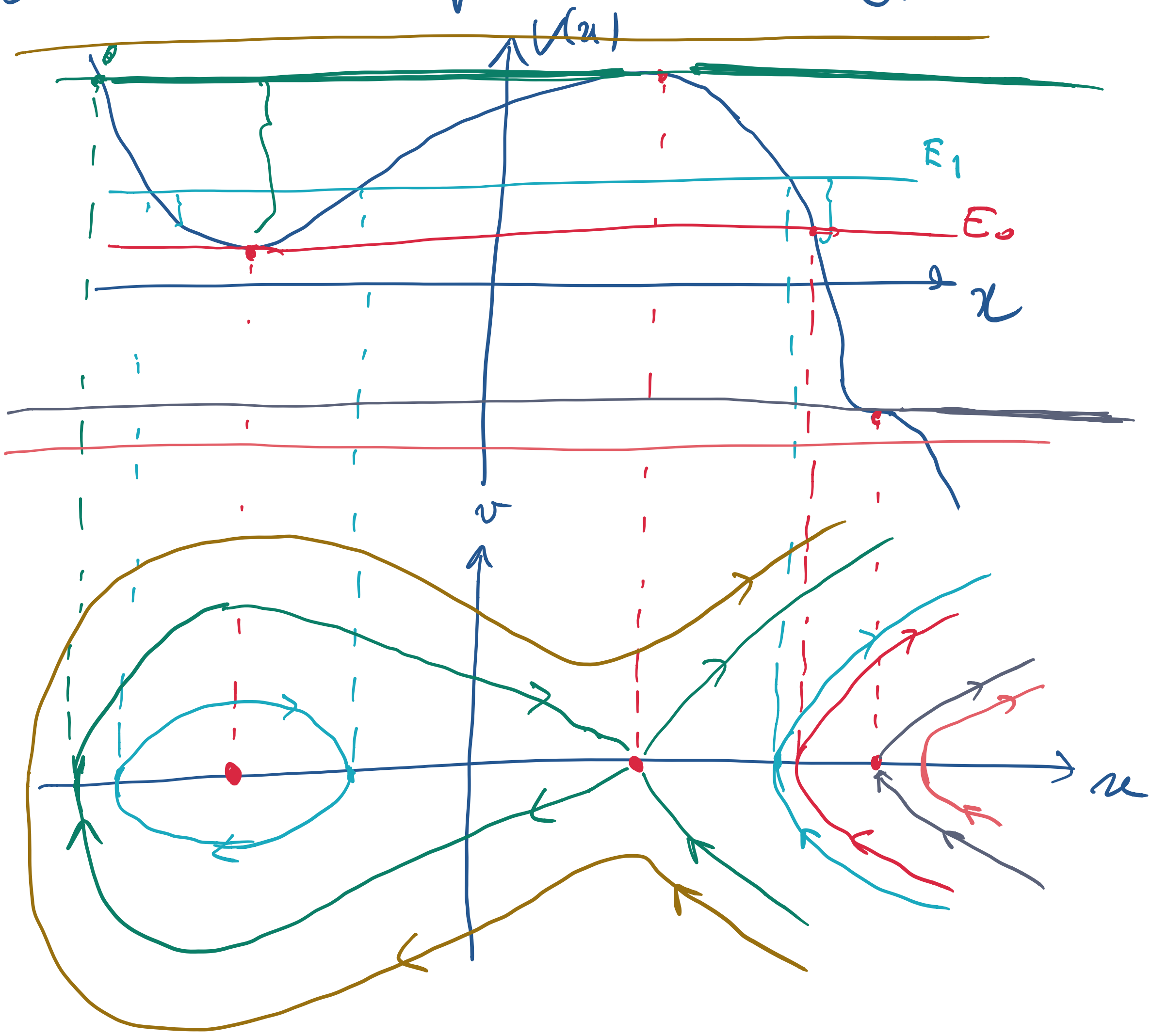
Ho traiettorie che si intersecano in $(x,v) = (0,0)$ in un sistema autonomo. Ma si intersecano a $t \to \pm\infty$.





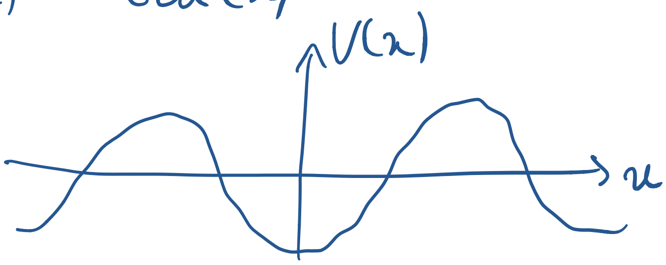
Tutte le x sono permesse

ES. Dato andam. di $V(x)$, determinare qualitativam. le traiettorie nel piano di FASE (x,v).
["Tracciare il diagramma di fase"].



ES. Diagramma di fase del PENDOLO.

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$



$\rightsquigarrow$ diagramma di fase?

Domani 25/03 lezione alle 11:15