Principio di conservazione della quantità di moto – equazione del momento (lineare)

Il principio di conservazione della quantità di moto diventa, per le applicazioni di fisica dell'atmosfera, l'equazione per il momento (lineare)

Derivazione dell'equazione

Il principio necessita un approccio lagrangiano in quanto si deve considerare la quantità di moto di una massa di fluido atmosferico.

La massa che considereremo avrà un suo volume quindi una densità media. La considereremo piccola a piacere, utilizzando il concetto di continuità.

La quantità di moto della massa individuale si esprime per definizione come segue:

$$\vec{P} := \rho \, Vol \, \vec{V}$$

dove ρ è la densità media del volume Vol, e $\vec{V}$ è la velocità con cui il volume d'aria si muove

Possiamo considerare il volume come un punto dello spazio, quindi $\vec{V}$ è la velocità del fluido nel punto in cui si trova la massa, cioè il volume scelto

È possibile dimostrare, (corso di fluidodinamica geofisica), che non si perde di generalità nella formulazione operativa del principio se viene considerato il volume unitario Vol=1, inoltre che la variazione della quantità di moto nel tempo

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt}$$

Questa identità è basata sulla conservazione della massa cioè l'equazione di continuità.

Una spiegazione intuitiva dell'equazione sopra riportata può essere data osservando che:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{[\rho \, vol]}_{\substack{\text{massa} \\ \text{volume} \\ \text{scelto}}}\vec{V} = [\rho \, vol]\frac{d\bar{V}}{dt}$$

in quanto la massa del volume scelto non varia nella formulazione lagrangiana

da cui

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \rho \underset{\substack{\| \\ 1 \\ \text{volume} \\ \text{unitario}}}{vol} \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt}$$

Il principio di conservazione della quantità di moto ci dice che la variazione di tale grandezza è dovuta (causata) dalle forze esterne che agiscono sul volume considerato. Da cui

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \text{forze agenti sul volume}$$

Possiamo distinguere le forze agenti sul volume del fluido in due classi ben distinte

a) Forze esprimibili in funzione del volume e della massa in esso contenuta

b) Forze esprimibili in funzione della superficie che limita il volume

Da cui il compito è quello di individuare quali sono le forze di tipo a) e quali di tipo b) ed esprimerle nella loro forma funzionale

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \underset{\text{di volume}}{\vec{F}_V} + \underset{\text{di superficie}}{\vec{F}_S}}$$