ANALISI QUANTITATIVA

$$E(x,v) = \boxed{T(v) + V(x) = \underset{\text{cost.}}{E}}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$
eq. diff. 2° ordine

Possiamo invertirla in v

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \rightsquigarrow$$

Deve valere su ogni traiettoria $\Rightarrow$

$\pm$: segno dipende dal verso di percorrenza (scegliamo segno +)

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(\underset{\text{cost.}}{E} - V(x(t)))}$$

Eq. diff. del 1° ordine in $x(t)$

(Famiglia a un parametro di eq. diff. del 1° ordine)

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\,t(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \to dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \longrightarrow$$

integrazione $\longrightarrow$

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

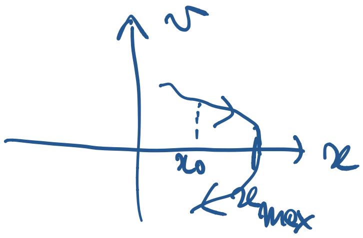
$x_0 = x(t_0)$

inversione $\longrightarrow$ $x(t)$

"Risolvere eq. diff. originaria per QUADRATURE"

- Quando $V(x) = E$ (cioè sui PUNTI D'INVERSIONE), l'integrando DIVERGE

$\rightsquigarrow$ cosa succede all'integrale?



$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

$|x_{max} - x_0| \ll 1$

$|x_{max} - \tilde{x}| \ll 1$

$$V(\tilde{x}) = \underset{\overset{\|}{E}}{V(x_{max})} + \underset{\overset{\#}{0}}{V'(x_{max})}(\tilde{x} - x_{max}) + O((\tilde{x} - x_{max})^2)$$

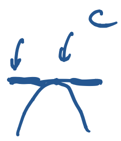
denom. : $\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(\tilde{x}))} \simeq \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V'(x_{max})}\sqrt{x_{max}-\tilde{x}}$

cambio variab. $\xi = x_{max} - \tilde{x}$

$$t(x_{max}) = t_0 + \int_0^{x_{max}-x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2V'(x_{max})}{m}}\sqrt{\xi}}$$

$\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ è integrabile in $\xi \sim 0$.

$\Rightarrow$ il pto arriva in x_{max} (pto inv.) a tempo FINITO

- 
$V(x) > E$


$V(x) < E$

$|c - x_0| \ll 1$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

$$V(\tilde{x}) = \underset{\substack{\parallel \\ E}}{V(c)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{V'(c)}\cdot(\tilde{x}-c) + \frac{1}{2}V''(c)\,(\tilde{x}-c)^2 + \dots$$

$V''(c) < 0$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(-V''(c))\,(\tilde{x}-c)^2}} = t_0 + \frac{1}{\sqrt{\frac{-2V''(c)}{m}}}\int_{x_0}^{c}\frac{d\tilde{x}}{c-\tilde{x}} =$$

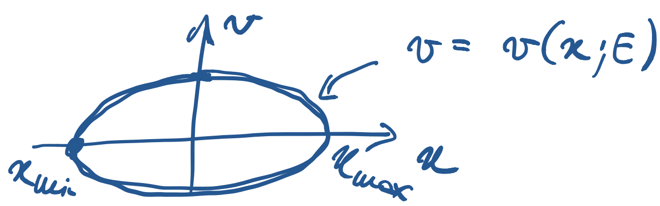
$$= t_0 + \frac{1}{\sqrt{\frac{-2V''(c)}{m}}}\int_0^{c-x_0}\frac{d\xi}{\xi}$$

$\xi = c - \tilde{x}$

$\frac{1}{\xi}$ non è integrabile in $\xi \sim 0$ (integrale diverge)

$\Rightarrow$ il pto materiale arriva al pto di equil. in un tempo INFINITO.

- Moti periodici



$\downarrow$

Periodo? Tempo che il pto impiega per andare da x_{min}

a x_{max} e ritorno.

$$T_E = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$

$$v(x;E) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

Def. $$S_E = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} v(x;E)\, dx$$ (area dentro la curva chiusa nel piano di fase)

$$m\frac{dS_E}{dE} = m \cdot 2 \frac{d}{dE}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}\, dx =$$

$$= 2\cancel{m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1 \cdot \cancel{2}/\cancel{m}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}\, dx = T_E$$

$$T_E = m\frac{dS_E}{dE}$$ dove S_E è l'area dentro la curva chiusa nel piano di fase

Es) osc. armonico

$$S_E = \underset{\text{ellisse}}{\text{Area}} = \frac{2E\pi}{m\omega}$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (v=0)$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (x=0)$$

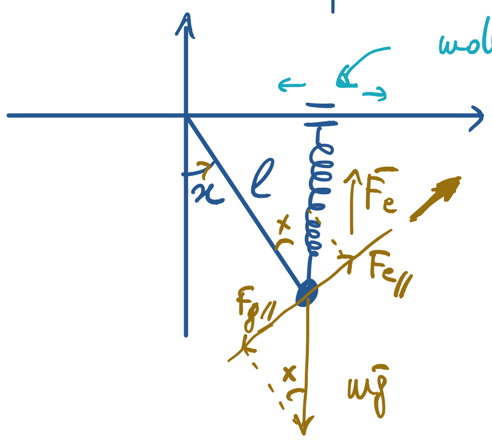
$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$T_E = m\frac{dS_E}{dE} = \frac{2\pi}{\omega}\ !$$

Biforcazioni

Le eq. diff. possono dipendere da dei parametri; l'andamento qualitativo delle soluzioni può cambiare drasticamente al variare del parametro.

ES)



$\vec{F_e} = +K\ell\cos x\, \vec{J_y}$

$F_{e\parallel} = K\ell\cos x\, \text{sen}x$

$F_{g\parallel} = -mg\,\text{sen}x$

$$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}K\ell^2\cos^2 x$$

$$m\ell\ddot{x} = -mg\,\text{sen}x + K\ell\cos x\,\text{sen}x$$

$$\omega^2 \equiv g/\ell \qquad \Omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}\text{sen}x + \frac{K}{m}\text{sen}x\cos x = -\frac{V'(x)}{m\ell}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2\text{sen}x + \Omega^2\text{sen}x\cos x \equiv f(x)$$ dip. da parametri ω, Ω

Punti di equil. (c t.c. $f(c)=0$)

$$f(x)=0 \quad : \quad \Omega^2\,\text{sen}x\left(\cos x - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) = 0$$

↳ $c_1 = 0 \qquad c_2 = \pi$ ← esistono sempre

$c_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$ ← esistono come sol. quando $\frac{\omega^2}{\Omega^2} \leq 1$

$\omega^2 \leq \Omega^2 \rightarrow$ 4 pti di equil.

$\omega^2 > \Omega^2 \rightarrow$ 2 pti di equil.

$$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}K\ell^2\cos^2 x = m\ell^2\left[(1-\cos x)\omega^2 + \frac{\Omega^2}{2}\cos^2 x\right]$$

$$V'(c_i) = 0$$

$$V'(x) = m\ell^2\left[\omega^2 \sin x - \Omega^2 \sin x \cos x\right]$$

$c_1 = 0 \qquad c_2 = \pi$

$c_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$

$$V''(x) = m\ell^2\left[\omega^2\cos x - \Omega^2\cos^2 x + \Omega^2 \sin^2 x\right]$$

$$= m\ell^2\left[\omega^2\cos x + \Omega^2 - 2\Omega^2\cos^2 x\right]$$

$$V''(c_1) = m\ell^2\left[\omega^2 + \Omega^2 - 2\Omega^2\right] = m\ell^2\left(\underline{\omega^2 - \Omega^2}\right)$$

$$V''(c_2) = m\ell^2\left[-\omega^2 + \Omega^2 - 2\Omega^2\right] = -m\ell^2\left[\omega^2 + \Omega^2\right]$$

$$V''(c_{3,4}) = m\ell^2\left[\omega^2\frac{\omega^2}{\Omega^2} + \Omega^2 - 2\Omega^2\frac{\omega^4}{\Omega^4}\right] =$$

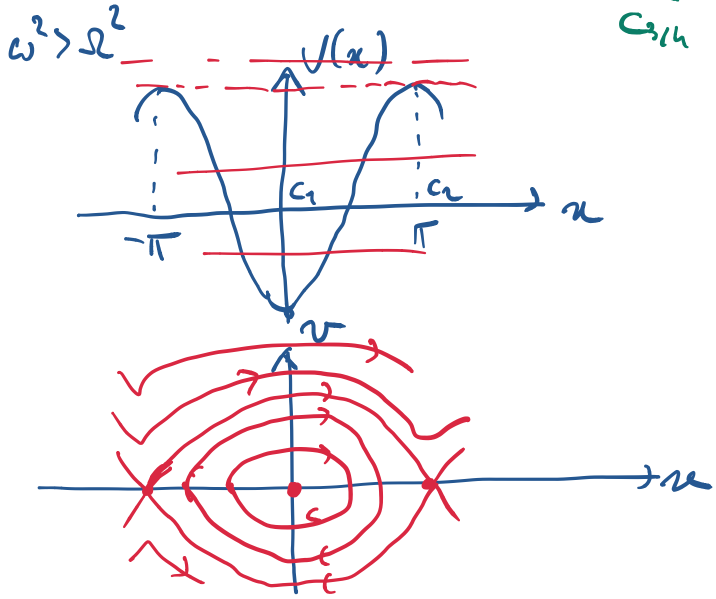
$$= \frac{m\ell^2}{\Omega^2}\left[\cancel{\omega^4} + \Omega^4 - \cancel{2}\omega^4\right] = \frac{m\ell^2}{\Omega^2}\left(\underline{\Omega^2 - \omega^2}\right)\left(\Omega^2 + \omega^2\right)$$

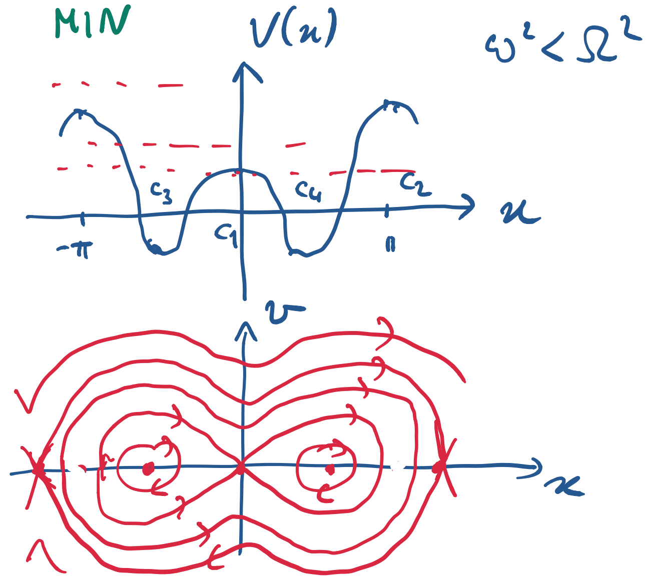
Quando $\omega^2 > \Omega^2$

$c_1 \to$ MIN
$c_2 \to$ MAX
$c_{3,4}$ NON SONO SOLUZ.

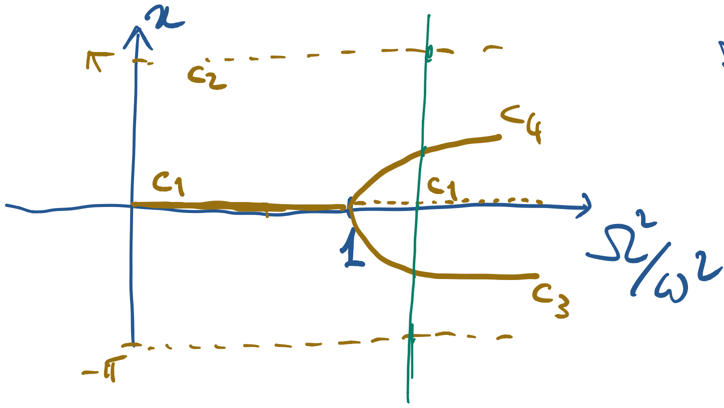
Quando $\omega^2 \leq \Omega^2$

$c_1 \to$ MAX
$c_2 \to$ MAX
$c_{3,4} \to$ MIN





BIFORCAZIONE a FORCHETTA



Disegnamo pti di equil.

— = MIN

.... = MAX

OSCILLAZIONI FORZATE

Forzante sinusoidale

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + C\cos(\Omega t) \qquad \Omega > 0$$

Consideriamo caso generico $\omega^2 \neq \Omega^2$

$$x_{om.}(t) = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$$

$$x_{part.}(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$-\Omega^2 A\cos(\Omega t + \varphi) = -\omega^2 A\cos(\Omega t + \varphi) + C\cos(\Omega t)$$

$$\hookrightarrow (\omega^2 - \Omega^2)A = C \qquad \varphi = 0$$

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t) + a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$$

$$x_0 = x(0) \qquad v_0 = \dot{x}(0)$$

$$\Rightarrow a = x_0 - \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2} \qquad b = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2}\big(\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)\big) + \underbrace{x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\text{sen}\,\omega t}_{\text{MOTO senza la FORZANTE}}$$

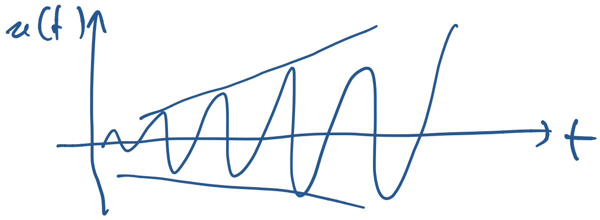
↳ indip. dai dati iniziali (prop. all'ampiezza della forzante) "oscillaz. forzate"

$x(t)$ dip. in maniera continua dai parametri presenti nell'eq. diff. che risolve.

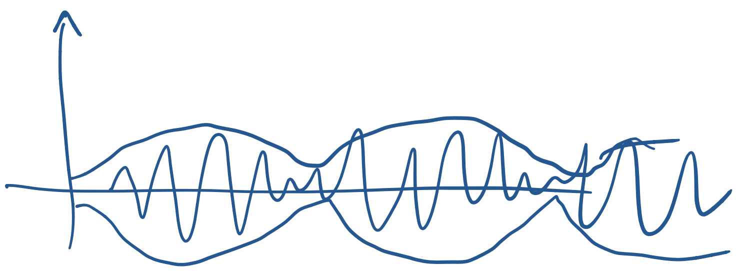
Studiamo il limite $\Omega \to \omega$

$$x(t) \to \underbrace{\frac{C}{2\omega}\, t \sin\omega t}_{\text{RISONANZA}} + x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t$$

↘ è soluz. di eq. originale in cui mettiamo $\Omega = \omega$



$\Omega \simeq \omega$



(Battimenti)