

INTEGRALE SUI CAMMINI [S.14, M.9]

La formula di riduzione di LST ci dice come ottenere gli elementi di matrice S $S_{i \rightarrow f} = \langle f | i \rangle_{in}$ a partire da funzioni di Green $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle$.

Queste possono essere calcolate nel formalismo di seconda quantizzazione, per esempio in teoria delle perturbazioni:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \phi_{\frac{1}{2}}(x_1) \dots \phi_{\frac{1}{2}}(x_n) \exp[-i \int d^4x H_I(x)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int d^4x H_I(x)] \} | 0 \rangle}$$

e calcolando diagrammi di Feynman usando il **teorema di Wick**.
 \Rightarrow Argomenti di QFT 1.

Un modo ALTERNATIVO di quantizzare la teoria è chiamato **formalismo dell'integrale sui cammini**.

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$

- $\int \mathcal{D}\phi$ indica l'integrale su tutte le CONFIGURAZIONI DI CAMPO CLASSICHE $\phi(x)$.
- $S[\phi]$ è l'azione classica valutata sulla configurazione ϕ .

INTEGRALI GAUSSIANI

Calcoliamo
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{1}{2}ap^2 + Jp}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}a\left(p - \frac{J}{a}\right) + \frac{J^2}{2a}\right)$$

← completiamo il quadrato

$$= e^{\frac{J^2}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}ap^2\right)$$

← trasliamo $p \rightarrow p + \frac{J}{a}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{J^2}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right)$$

← $\left[p \rightarrow \frac{p}{\sqrt{a}}, dp \rightarrow \frac{dp}{\sqrt{a}} \right]$

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right) \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \\ &= \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r dr e^{-\frac{1}{2}r^2} = \pi \int_0^{\infty} dr^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{1}{2}ap^2 + Jp} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{J^2}{2a}}$$

Per più dimensioni e p complessi: $ap^2 \rightarrow p_i a_{ij} p_j = \vec{p}^T A \vec{p}$
dove A è una matrice simmetrica

Diagonalizzando $A = R \lambda R^{-1}$ e definendo $\vec{p} \rightarrow R \vec{p}'$ det $R = 1$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{p}^T A \vec{p} + \vec{J}^T \cdot \vec{p}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p}' \exp\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\vec{p}'^T}_{= p_i^2} \lambda \vec{p}' + \underbrace{(\vec{J}^T R)}_{= J_i p_i} \vec{p}'\right)$$

diventa un prodotto di integrali 1D:

$$I = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J}\right), \quad n \text{ è la dimensione di } \vec{p}.$$

MECCANICA QUANTISTICA COME INTEGRALE SUL CAMMINO

Consideriamo un sistema quantistico in 1D, non relativistico, con Hamiltoniana $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t)$. $\hat{H}, \hat{p}, \hat{x}$: operatori

Se lo stato iniziale $|i\rangle$ è localizzato a x_i al tempo t_i e lo "finale" $|f\rangle$ " a x_f " t_f

Se $\hat{H}(\hat{x}, t) = \hat{H}(\hat{x})$ (t-indipendente) $|i(t_i)\rangle = |x_i\rangle$
 $|f(t_f)\rangle = |x_f\rangle$

Lo stato $|i\rangle \equiv |x_i, t_i\rangle$ evolve in

$$U(t_f, t_i) |i\rangle = e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} |i\rangle$$

L'ampiezza di transizione sarà data da:

$$\langle f|i\rangle = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f, t_f | e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} |x_i, t_f\rangle \quad [\text{Sakurai, 2.2.47}]$$

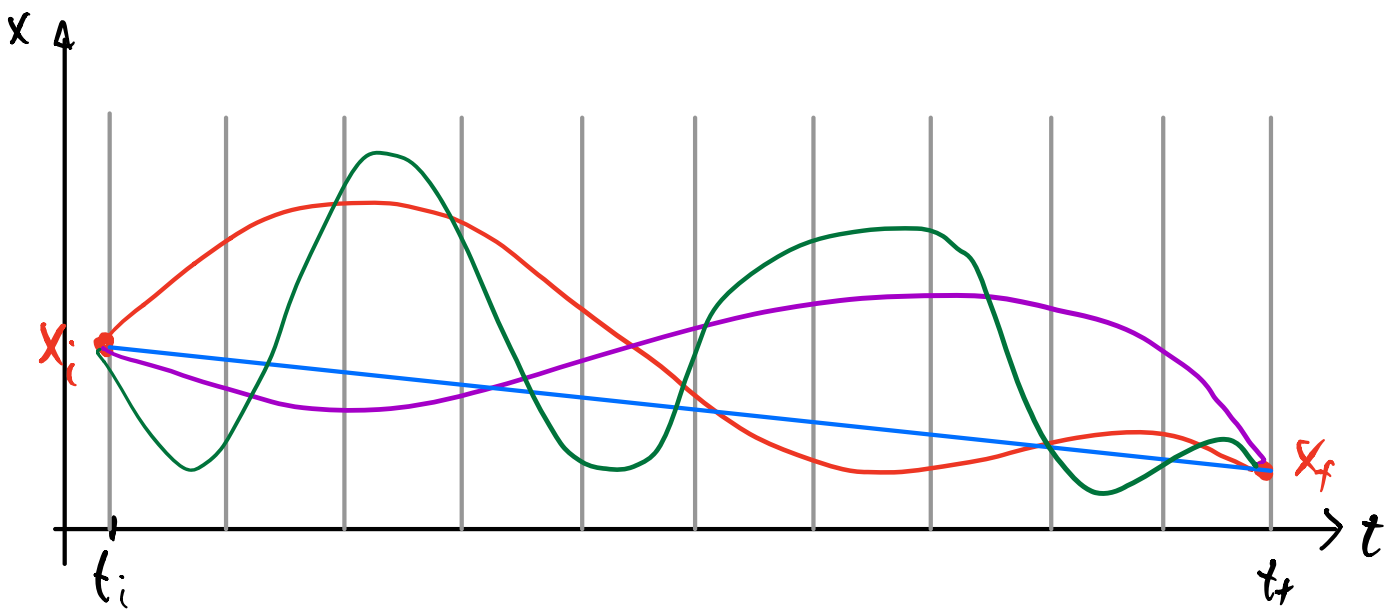
↳ Calcolabile se conosciamo una base di autostati di \hat{H} .

• Se $\hat{H}(x) \rightarrow \hat{H}(x, t)$ | | |

Se \hat{H} dipende in maniera continua da t possiamo fare la stessa cosa ma per intervalli di tempo infinitesimi dt .

Dividiamo $t_f - t_i$ in $(n+1)$ intervalli dt : $t_j = t_i + jdt$, $t_{n+1} = t_f$

$$\langle f|i\rangle = \int dx_n \dots dx_1 \langle x_f | e^{-iH(t_f)dt} |x_n\rangle \langle x_n | \dots |x_2\rangle \langle x_2 | e^{-iH(t_2)dt} |x_1\rangle \langle x_1 | e^{-iH(t_i)dt} |x_i\rangle$$



Per ogni intervallo Δt :

Assumiamo V non dipende da p

$$\langle x_{j+1} | e^{-iH \Delta t} | x_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle x_{j+1} | p \rangle \langle p | e^{-i\left(\frac{p^2}{2m} + V(\hat{x}, t_j)\right) \Delta t} | x_j \rangle =$$

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$$

usiamo: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Baker-Campbell-Hausdorff} \\ e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t} e^{-i\hat{V}\Delta t} = e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\Delta t} - \frac{1}{2} [\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{V}] \Delta t^2 + \dots \approx e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\Delta t} + O(\Delta t^2) \end{array} \right.$

$$= e^{-iV(x_j, t_j) \Delta t} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{p^2}{2m} \Delta t + ip(x_{j+1} - x_j)}$$

usiamo (integrale Gaussiano)

$$= N e^{-iV(x_j, t_j) \Delta t} e^{i\frac{m}{2} \Delta t \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{(\Delta t)^2}} = N e^{iL(x_j, \dot{x}_j) \Delta t}$$

Normalizzazione

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t) \leftarrow \text{Lagrangiana}$$

L'integrale Gaussiano ha effettuato una trasformazione di Legendre da H a L .

$$\Rightarrow \langle f|i \rangle = N^n \int dx_n \dots dx_1 \exp\left(i \sum_j \delta t L(x_j, \dot{x}_j)\right) \quad \approx \text{ tutto classico nel r.b.s.}$$

Nel limite $\delta t \rightarrow 0$ si ha

$$\langle f|i \rangle = N \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x(t) e^{iS[x]}$$

• $\int \mathcal{D}x(t)$ indica la somma su tutti i cammini con le corrette condizioni al contorno

• $S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x(t), \dot{x}(t))$ è l'azione calcolata su ciascun cammino

LIMITE CLASSICO

Dobbiamo reintrodurre \hbar . Dato che $[t\hbar] = \text{azione}$

$$\langle f|i \rangle = N \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x(t) e^{iS[x]/\hbar}$$

Nel limite $\hbar \rightarrow 0$ possiamo usare il **PRINCIPIO DI FASE STAZIONARIA** (method of stationary phase or steepest descent method) per il quale l'integrale è completamente dominato dalla **CONFIGURAZIONE CHE MINIMIZZA L'AZIONE** (tutte le altre oscillano infinitamente più veloci e si integrano a zero)

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 0 \quad \leftarrow \text{equazioni del moto classiche}$$

In più dimensioni: $\vec{x} = \{x_i\}$

$$\langle f|i \rangle = \langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle = N \int_{\vec{x}(t_i)=\vec{x}_i}^{\vec{x}(t_f)=\vec{x}_f} \prod_{\vec{x}(t)} [D] x_i(t) e^{iS[\vec{x}]/\hbar}$$



Possiamo anche calcolare l'elemento di matrice di un ^[Eq. 9.27] operatore:

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | \hat{O}(t) | x_i, t_i \rangle &= \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t)} \hat{O} e^{-i\hat{H}(t-t_i)} | x_i \rangle \\ &= \int dx' dx'' \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t)} | x' \rangle \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \langle x'' | e^{-i\hat{H}(t-t_i)} | x_i \rangle \\ &= \int dx' dx'' \int_{x_i}^{x_f} D(x) e^{iS[x]} \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \int_{x_i}^{x''} D(x') e^{iS[x']} \end{aligned}$$

Assuming $\langle x' | \hat{O} | x'' \rangle = \hat{O}(x') \delta(x' - x'')$ ✓ OPERATORE LOCALE.

$$= \int_{x_i}^{x_f} D(x) e^{iS[x]} \hat{O}(x(t))$$



INTEGRALE SUI CAMMINI IN QFT PER CAMPI SCALARI [M.1.2]

Generalizziamo l'espressione per d dimensioni alla teoria dei campi

QM in d -dim	\longrightarrow	QFT
indice j	\longrightarrow	coordinata \vec{x}
$x_j(t)$	\longrightarrow	$\varphi(\vec{x}, t)$
Lagrangiana L	\longrightarrow	$\int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$
$\prod_j dx_j$	\longrightarrow	$\mathcal{D}\varphi(\vec{x}) \equiv \mathcal{D}\varphi$

Quindi:

$$\langle \varphi_f(\vec{x}), t_f | \varphi_i(\vec{x}), t_i \rangle = N \int_{\varphi(\vec{x}, t_i) = \varphi_i(\vec{x})}^{\varphi(\vec{x}, t_f) = \varphi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\}$$

↑
CAMPI CLASSICI

Scegliamo come $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_f(\vec{x}) = 0$ e $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty$

$$\langle 0 | 0 \rangle_{in} = \langle 0 | 0 \rangle = N \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]}$$

Dato che $\langle 0 | 0 \rangle = 1 \Rightarrow N = \left(\int \mathcal{D}\varphi e^{iS} \right)^{-1}$

La normalizzazione N dipende solo dalla misura e l'azione, non da cosa metto nell'integrale.

PRO E CONTRO DELL'INTEGRACE SUI CAMMINI

VANTAGGI:

- Formulazione di QFT esplicitamente Lorentz-covariante
- Non devo introdurre l'Hamiltoniana, il che permette di ottenere la quantizzazione di teorie di gauge in maniera chiara.
- Effetti delle simmetrie di una teoria di campo sono più evidenti.
- Utile per studiare effetti non-perturbativi:
 - QCD sul lattice
 - Istantoni, solitoni
 - Tunneling

SVANTAGGI:

- L'unitarietà della matrice S è meno evidente che nel formalismo di seconda quantizzazione
- Meno utile per problemi non-relativistici.