Capitolo 0

Primitive e Integrali Indefiniti

In questo capitolo ci proponiamo di esporre la teoria delle funzioni primitive per funzioni reali di una variabile reale e di dare cenni ai metodi utilizzati per la loro determinazione. Questo argomento fa parte del Calcolo Differenziale, ma trova le sue maggiori applicazioni nel calcolo degli integrali definiti.

0.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 0.1 *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è* ***primitiva*** *della funzione f nell'intervallo I se F è derivabile in I e si ha*

$$F'(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \in I.$$

Esempio 1

- $F(x) = \sin x + 2004$ è primitiva di $f(x) = \cos x$ in $I = \mathbb{R}$.
- $F(x) = \log|x|$ è primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in $I = (-\infty, 0)$ e in $I = (0, +\infty)$.

Osservazioni

• Ovviamente, non ogni funzione è la primitiva di un'altra. Infatti, ogni funzione non derivabile non può essere una primitiva di alcuna funzione.

• Tutte le funzioni continue in I ammettono certamente primitiva in I. Questo segue dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (vedi Cap. 1)

• Esistono funzioni che non ammettono primitiva. Ad esempio, la funzione $f(x) = sgn(x)$ non ammette primitiva in alcun intervallo aperto contenente l'origine. (Questo segue dal fatto che le derivate godono della proprietà di Darboux.)

• La primitiva, se esiste, non è unica. Infatti, se la funzione F è primitiva di f in I, allora tutte le funzioni $G(x) = F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ sono primitive di f in I.

Inoltre tutte le primitive hanno questa forma come afferma la seguente

Proposizione 0.2 *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Se le funzioni F e G sono primitive di f in I allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$G(x) = F(x) + c \qquad \textit{per ogni } x \in I.$$

Dim. Sia $H = G - F$. Per ogni $x \in I$ si ha

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Per un Corollario del Teorema di Lagrange segue quindi che la funzione H è costante in I. ▲

Nella Proposizione precedente l'ipotesi che I sia un intervallo è essenziale, come mostra il seguente esempio.

Sia $E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. La funzione $F(x) = \log|x|$ è una primitiva di f in E. Lo sono anche le funzioni

$$G(x) = \begin{cases} \log(-x) + a & \text{se } x < 0 \\ \log x + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (anche distinti!).

Definizione 0.3 *Si chiama* ***integrale indefinito*** *di f in I l'insieme delle sue primitive e viene denotato con il simbolo*

$$\int f(x)\ dx.$$

Quindi, se F è una primitiva di f in I si ha

$$\int f(x)\ dx = \{G : I \to \mathbb{R} \text{ tali che esiste } c \in \mathbb{R} \text{ tale che } G(x) = F(x) + c \text{ per ogni } x \in I\}.$$

Per comodità di scrittura useremo la seguente forma

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c.$$

0.2 Calcolo di primitive

I metodi per il calcolo degli integrali indefiniti sono conseguenze immediate di alcune proprietà delle derivate.

Proposizione 0.4 (Linearità) *Siano f e g due funzioni che ammettono primitiva in I. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\int [af(x) + bg(x)]\ dx = a \int f(x)\ dx + b \int g(x)\ dx.$$

Esempio 2

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x\sqrt{x}}\ dx = \int \sqrt{x}\ dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\ dx$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c.$$

Dalla regola di derivazione di un prodotto si ha il seguente

Teorema 0.5 (Integrazione per parti) *Siano f e g due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ in I. Allora*

$$\int f(x)\,g'(x)\;dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\;dx.$$

Dim. Per ogni $x \in I$ si ha

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,,$$

quindi

$$\begin{aligned}\int f(x)\,g'(x)\;dx &= \int \big([f(x)\,g(x)]' - f'(x)\,g(x)\big)\;dx \\ &= f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\;dx.\end{aligned}$$

▲

Esempio 3

$$\int \log x\;dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\;dx = x\log x - x + c \quad \textit{in}\ (0,+\infty)\,.$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ha il seguente

Teorema 0.6 (Integrazione per sostituzione) *Siano I e J intervalli e le funzioni f, φ tali che*

$$\varphi : J \longrightarrow I \quad e \quad f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Supponiamo che $\int f(t)\;dt = F(t) + c$ in I e che φ sia derivabile in J con derivata continua. Allora

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\;dx = F(\varphi(x)) + c \qquad \textit{in } J.$$

Dim. Per ogni $x \in J$ si ha

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,.$$

▲

Esempio 4

$$\int \frac{x}{x^2+7}\;dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+7}\,(2x)\;dx = \frac{1}{2}\log\left(x^2+7\right) + c.$$

Esempio 5

$$\int \frac{\log x}{x}\;dx = \frac{1}{2}\log^2 x + c.$$

Per utilizzare al meglio questa tecnica è opportuno rileggere il teorema precedente anche in modo diverso. La formula

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ \ dx = F(\varphi(x)) + c$$

si può anche scrivere come

$$\left[\int f(t)\ \ dt\right]_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ \ dx.$$

Quindi, dovendo calcolare $\int f(t)\ dt$, si opera la sostituzione $t = \varphi(x)$ (da cui $dt = \varphi'(x)\ dx$) e ci si riconduce a determinare $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ dx$.

Esempio 6

Per calcolare $\int \arctan\sqrt{x}\ dx$ in $I = (0, +\infty)$ si pone $\sqrt{x} = t$, ossia $x = t^2$, e quindi $dx = 2t\ dt$ e, integrando per parti, si ha quindi

$$\begin{aligned}\int 2t\arctan t\ dt &= t^2\arctan t - \int \frac{t^2}{t^2+1}\ dt = t^2\arctan t - \int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}\ dt\\ &= t^2\arctan t - t + \arctan t + c.\end{aligned}$$

Ricordando che $\sqrt{x} = t$, si ottiene

$$\int \arctan\sqrt{x}\ dx = x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c.$$

Esempio 7

Per calcolare $\int x\cos^2\left(x^2+3\right)\ dx$ si pone $x^2 + 3 = t$, e quindi $2x\,dx = dt$ e quindi ci si riconduce a calcolare

$$\frac{1}{2}\int \cos^2 t\,dt.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t + \int \sin^2 t\,dt.$$

Dalla relazione $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ si ottiene

$$\int \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t + t + \int \cos^2 t\,dt$$

da cui si ricava

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\sin t\cos t + t) + c$$

e quindi

$$\int x\cos^2\left(x^2+3\right)dx = \frac{1}{4}\sin\left(x^2+3\right)\cos\left(x^2+3\right) + \frac{1}{4}x^2 + c.$$

0.3 Cenni all'integrazione delle funzioni razionali

Vogliamo accennare al metodo per determinare le primitive di funzioni della forma

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

con A e B polinomi.
Possiamo considerare solo il caso in cui $\deg A(x) < \deg B(x)$.
Infatti se fosse $\deg A(x) \geq \deg B(x)$ allora esisterebbero (unici!) due polinomi (quoziente e resto) $Q(x)$ e $R(x)$ con $\deg R(x) < \deg B(x)$ tali che

$$A(x) = Q(x) B(x) + R(x).$$

Ossia

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}.$$

Il polinomio a coefficienti reali $B(x)$ può essere scomposto in modo unico in fattori nel seguente modo

$$B(x) = \alpha (x-b_1)^{n_1} \cdots (x-b_l)^{n_l} \left(x^2+c_1x+d_1\right)^{m_1} \cdots \left(x^2+c_kx+d_k\right)^{m_k}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, b_i è radice reale di $B(x)$ di molteplicità n_i per ogni $i = 1, \dots l$ e il polinomio a coefficienti reali $x^2 + c_ix + d_i$ è irriducibile in $\mathbb{R}$ (cioè $c_i^2 - 4d_i < 0$) per ogni $i = 1, \dots k$.

Inoltre, nelle ipotesi precedenti, la funzione $f(x)$ può essere scritta in modo unico nella forma

$$f(x) = \frac{\alpha_{11}}{x-b_1} + \cdots + \frac{\alpha_{1n_1}}{(x-b_1)^{n_1}} + \frac{\alpha_{12}}{x-b_2} + \cdots + \frac{\alpha_{l\,n_l}}{(x-b_l)^{n_l}} +$$

$$+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2+c_1x+d_1} + \cdots + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{C_{km_k}x + D_{km_k}}{(x^2+c_kx+d_k)^{m_k}}.$$

La funzione iniziale è stata quindi scritta come somma di addendi della forma

$$\frac{\alpha}{(x-b)^n} \qquad \alpha, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

e della forma

$$\frac{\gamma x + \delta}{(x^2+cx+d)^m} \qquad \gamma, \delta, c, d \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$$

con il polinomio $x^2 + cx + d$ irriducibile in $\mathbb{R}$.

L'integrazione della funzione f è quindi ricondotta a quella dei singoli addendi.
Facilmente, si ottiene

$$\int \frac{\alpha}{(x-b)^n}\, dx = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-n}(x-b)^{1-n} & \text{se } n \geq 2 \\ \alpha \log|x-b| & \text{se } n = 1 \end{cases}.$$

Per quanto riguarda gli addendi della seconda forma osserviamo inizialmente che

$$\frac{\gamma x+\delta}{(x^2+cx+d)^m}=\frac{\gamma}{2}\frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^m}+\frac{\delta-\frac{c\gamma}{2}}{(x^2+cx+d)^m}.$$

Facilmente si ha

$$\int\frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^m}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{1-m}\left(x^2+cx+d\right)^{1-m} & \text{se } m\ge 2\\ \log\left(x^2+cx+d\right) & \text{se } m=1\end{cases}$$

Restano quindi solo da determinare le primitive degli addendi della forma

$$\frac{1}{(x^2+cx+d)^m}$$

con $c,d\in\mathbb{R}$ e x^2+cx+d polinomio irriducibile in $\mathbb{R}$.

Per questo si può utilizzare il seguente

Lemma 0.7 *Per ogni numero naturale $m\ge 1$ sia*

$$I_m=\int\frac{dx}{(x^2+1)^m}.$$

Allora

$$I_1=\arctan x+c$$

e per ogni $m\ge 2$ si ha

$$I_m=\frac{x\left(x^2+1\right)^{1-m}}{2\,(m-1)}+\frac{2m-3}{2\,(m-1)}I_{m-1}.$$

Osserviamo ora che, nelle ipotesi fatte, si ha

$$\begin{aligned}x^2+cx+d&=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(d-\frac{c^2}{4}\right)\\&=\left(d-\frac{c^2}{4}\right)\left\{1+\left[\frac{1}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\left(x+\frac{c}{2}\right)\right]^2\right\}\end{aligned}$$

e quindi con la sostituzione

$$t=\frac{1}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\left(x+\frac{c}{2}\right)$$

l'integrazione di $\dfrac{1}{(x^2+cx+d)^m}$ si riconduce a quella di $\dfrac{1}{(t^2+1)^m}$.

Esempio 8 *Calcolare le primitive di*

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x(x^2+1)}.$$

Si cercano tre costanti in modo che

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si trova che $A = C = -1$ e $B = 2$ ossia

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

e quindi

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{x(x^2+1)}\, dx = -\log|x| + \log\left(x^2+1\right) - \arctan x + c.$$

Esempio 9 *Calcolare*

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x(x-1)^2}\, dx.$$

Scrivendo

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

si ottiene $A = B = 1$ e $C = 2$. In conclusione

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x(x-1)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = \log|x(x-1)| - \frac{2}{x-1} + c.$$

Esempio 10 *Calcolare*

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}\, dx.$$

Scrivendo

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

si ottiene $A = 2$ e $B = C = 1$. D'altra parte

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

quindi

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= 2\log|x-1| + \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Per calcolare l'ultimo integrale osserviamo che

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$$

Posto $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, e quindi $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$, si ottiene

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + c$$

e quindi

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}\,dx = 2\log|x-1| + \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$