Struttura per Scadenza dei Tassi

Struttura per Scadenza dei Tassi

- Obbiettivo è la costruzione della struttura per scadenza dei tassi (o curva dei tassi).
- A tal fine si considera un modello idealizzato di mercato obbligazionario, caratterizzato da numerose ipotesi semplificatrici, più o meno forti.
- Nella realtà la curva dei tassi è relativa ad un emittente (e.g. uno stato) o ad un certo tipo di mercato (LIBOR, EURIBOR, imprese con un dato rating), ad una certa valuta, ad un certo intervallo temporale, ...

Ipotesi: Scadenzario

- Sia $\mathbb{T}$ lo scadenzario (tenor), cioè l'insieme delle epoche in cui avvengono le transazioni. In particolare, concentriamo l'attenzione su due casi.
  - ⋆ Scadenzario discreto (finito o infinito):
  $$\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots\}.$$
  Caso particolare: $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per ogni $i \geq 1$.
  - ⋆ Scadenzario continuo:
  $$\mathbb{T} = [0, T] \text{ oppure } \mathbb{T} = [0, +\infty[$$
  - ⋆ $0 =$ oggi; il tempo viene misurato in anni.

Gestione del Rischio Finanziario

Ipotesi: Mercati Perfetti

- Mercato Competitivo: gli agenti sono price-takers (non price-makers) cioè con le loro azioni non modificano i prezzi.
- Mercato privo di Frizionalità: non ci sono tassazioni sui guadagni, né costi di transazione, non ci sono vincoli di vendita allo scoperto (short-selling) e i titoli sono perfettamente divisibili.
- Mercato privo di Opportunità di Arbitraggio (AOA).
  Un'arbitraggio (free-lunch) è una strategia che produce una sequenza di cash-flows nonnegativi in ogni epoca ed in ogni stato del mondo, e, con probabilità positiva, un cash-flow positivo in qualche epoca.
  - ⋆ AOA è condizione necessaria per l'equilibrio;
  - ⋆ AOA $\Rightarrow$ Legge del prezzo unico: due strategie che offrono gli stessi cash-flows devono avere lo stesso valore iniziale.

Struttura per Scadenza dei Prezzi

- Per ogni $s \in \mathbb{T},\ s > 0$ supponiamo che vi sia un titolo a cedola nulla (TCN) con scadenza in s, di valore nominale 1€, e che tale titolo possa essere scambiato ad ogni epoca $t \in \mathbb{T},\ t < s$. Il suo prezzo sarà indicato con $B(t, s)$.
- $B(t, s)$ può essere visto come fattore di sconto tra s e t: il valore in t di C€ in s è $CB(t, s)$.
- Proprietà di $B(t, s)$:
  - ⋆ Ci mettiamo nel caso in cui i TCN siano default-free, cioè pagano con certezza 1€ a scadenza. A tal fine possiamo pensare a titoli emessi da uno stato o altro emittente con rating elevato. Di conseguenza deve essere $B(s, s) = 1$.
  - ⋆ Per AOA, deve essere inoltre $B(t, s) > 0$ per $t < s$ e $B(t, s) = 0$ per $t > s$.
- Si chiama **struttura per scadenza dei prezzi (discount function)** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ la funzione

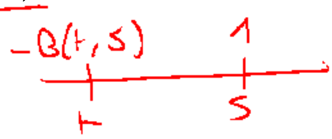
$$s \to B(t, s); \quad s \geq t, \ s \in \mathbb{T}.$$

FISSATO

Struttura per Scadenza dei Tassi a Pronti

- Convenzione: tutti i tassi che consideriamo sono annualizzati.
- Definiamo il **tasso a pronti** in t per l'epoca s, $r(t, s)$, con $t,\ s \in \mathbb{T},\ t < s$ tramite la

$$\boxed{B(t, s) = e^{-(s-t)r(t,s)}.}$$



  - ⋆ Quindi $r(t, s)$ è il tasso di rendimento (intensità d'interesse), in regime di interesse composto, corrispondente all'operazione in cui si compra in t il TCN e lo si detiene fino alla scadenza s.
  - ⋆ Si tratta di tassi a pronti (**spot**), cioè tassi concordati in t per un investimento che inizia in t stesso.
- Riesce dunque

$$r(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log B(t, s)$$

- La **struttura per scadenza dei tassi a pronti** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

FISSATO

$$s \to r(t, s); \quad s \geq t, \ s \in \mathbb{T}.$$

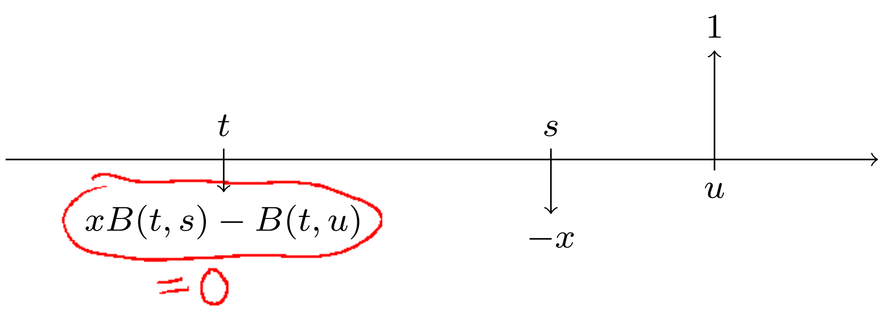
Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi**.

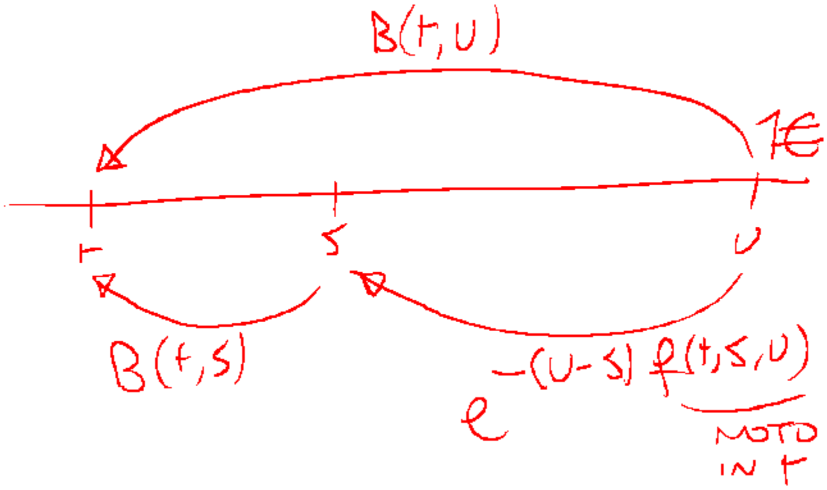
Day Count Conventions

- Al fine di calcolare tassi e rendimenti, occorre calcolare la frazione d'anno che intercorre fra due date. Prevalgono regole di calcolo diverso a seconda dei mercati e degli strumenti. La maggior parte delle regole rientrano fra le seguenti (o fra loro varianti).
  1. Actual/Actual: numero effettivo di giorni fra le due date rapportato al numero effettivo di giorni nell'anno (365 o 366), con correzioni se fra due anni diversi.
  2. Actual/360 (Variante: Actual/365): numero effettivo di giorni fra le due date diviso 360 (o 365).
  3. 30/360: ogni mese ha 30 giorni, ogni anno ha 360 giorni.
- Esempio: frazione d'anno tra 27/2/07 e 5/1/07: 1) $53/365 = 0.1452$, 2) $53/360 = 0.1472$, 3) $52/360 = 0.1444$.
- Importanti sono anche le 'business date conventions', in base alle quali date di pagamento che coincidono con festività vengono convertite in date lavorative.
- Excel: *YEARFRAC* e *WORKDAY*; **R**: eg pacchetti **RQuantlib** e la suite **RMetrics**

Tassi a Termine

- A differenza dei tassi a pronti, i **tassi a termine** o **forward** sono relativi a investimenti concordati in un dato istante, che iniziano in un istante successivo.
- Fissati $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ con $t \le s < u$, consideriamo la seguente operazione costruita all'epoca t.
  - ⋆ Acquisto un TCN con scadenza u: flusso in t pari a $-B(t,u)$ ed in u pari a $+1$;
  - ⋆ vendo x TCN con scadenza s: flusso in t pari a $+xB(t,s)$ ed in s pari a $-x$.





$$\underbrace{B(t,U)}_{\substack{\parallel \\ e^{-(U-t)r(t,U)}}} = \underbrace{B(t,s)}_{\substack{\parallel \\ e^{-(s-t)r(t,s)}}} \cdot e^{-(U-s)f(t,s,U)} \qquad / \log$$

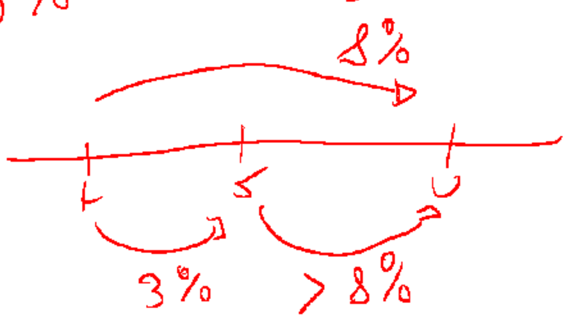
$$(U-t)\, r(t,U) = (s-t)\cdot r(t,s) + (U-s) f(t,s,U) \qquad / \cdot (-1)$$

$$\underbrace{r(t,U)}_{\substack{\text{TASSO} \\ \text{"A LUNGO"}}} = \underbrace{\frac{s-t}{U-t} \overbrace{r(t,s)}^{\text{"TASSO A BREVE"}} + \frac{U-s}{U-t} \overbrace{f(t,s,U)}^{\text{"TASSO A TERMINE"}}}_{\text{MEDIA PESATA}} \qquad / : U-t$$

PESI $\quad s-t \quad r(t,s)$

$\qquad\quad U-s \quad f(t,s,U)$

$r(t,U) = 8\%$ $\qquad r(t,s) = 3\%$ $\qquad f(t,s,U) > 8\%$

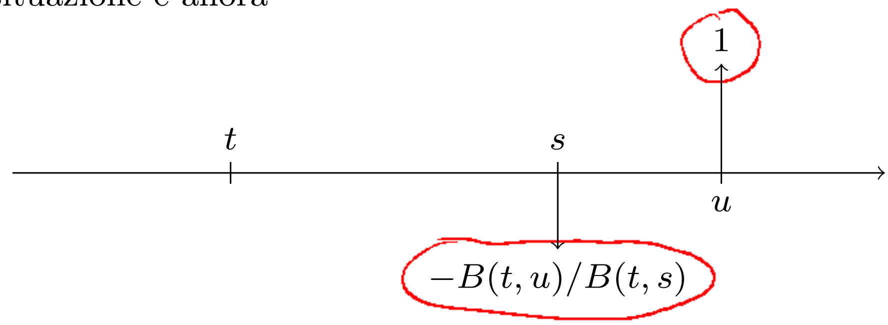


. . . Tassi a Termine

▷ ⋆ Scegliamo x in maniera tale che il flusso in t sia nullo:

$$xB(t,s) - B(t,u) = 0 \Leftrightarrow x = B(t,u)/B(t,s).$$

⋆ La situazione è allora



▷ Tale operazione genera flussi di cassa in s ed u, ma non in t (istante in cui l'operazione è concordata).

. . . Tassi a Termine

▷ Si definisce **tasso a termine** in t per il periodo $[s,u]$, $f(t,s,u)$, il tasso di rendimento (in regime di interesse composto) corrispondente a questa operazione:

$$<1 \left\{ \frac{B(t,u)}{B(t,s)} \right. = \mathrm{e}^{-(u-s)\underbrace{f(t,s,u)}_{>0}},$$

da cui si ricava che

$$\boxed{f(t,s,u) = -\frac{1}{u-s}\log\frac{B(t,u)}{B(t,s)}.}$$

▷ La **struttura per scadenza dei tassi forward** all'epoca t è la funzione

$$(s,u) \rightarrow f(\overset{\text{FISSATO}}{\overset{\downarrow}{t}}, s, u), \quad u > s \geq t, \; s, \; u \in \mathbb{T}.$$

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

▷ È equivalente conoscere, ad una certa epoca t, i prezzi $B(t,s)$, i tassi a pronti $r(t,s)$ o i tassi a termine $f(t,s,u)$.

⋆ Infatti, noti i prezzi, si determinano (per costruzione) i tassi a termine.

⋆ Viceversa, noti i tassi a termine, si hanno come caso particolare i tassi a pronti: ponendo $s=t$ in $f(t,s,u)$ si trova

$$\begin{aligned} f(t,t,u) &= -\frac{1}{u-t}\log\frac{B(t,u)}{B(t,t)} \\ &= -\frac{1}{u-t}\log B(t,u) \\ &= r(t,u). \end{aligned}$$

⋆ Infine, come già osservato, noti i tassi a pronti, sono noti anche i prezzi.

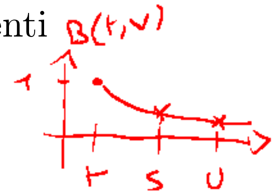
$B(t,u) = e^{-(u-t)\underbrace{r(t,u)}_{>0}}$

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

$B(t,t)=1$

▷ Per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t<u$, $r(t,u)>0 \Leftrightarrow B(t,u)<1$ cioè i tassi a pronti sono positivi se e solo se il corrispondente TCN vende a sconto.

▷ L'ultima proprietà ha le seguenti implicazioni: le seguenti proposizioni sono equivalenti



1. $B(t,s) > B(t,u)$ per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ e $t \le s < u$
2. $f(t,s,u) > 0$ per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ e $t \le s < u$
3. $B(t,u) < 1$ per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$
4. $r(t,u) > 0$ per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$

DISCOUNT FUNCTION
È DECRESCENTE

(1) ⇔ (2) segue dalla definizione di $f(t,s,u)$,

$$B(t,u) = B(t,s)\mathrm{e}^{-f(t,s,u)(u-s)}.$$

(3) ⇔ (4) è stata vista sopra.

(1) ⇒ (3) basta prendere $t=s$ in (1). $\overset{1}{\overset{\shortparallel}{B(t,t)}} > B(t,u)$

Per provare che (3) ⇒ (1), consideriamo la seguente strategia: in t acquisto di un TCN con scadenza s, vendita di un TCN con scadenza u; in s acquisto di un TCN con scadenza u

$B(t,u) - B(t,s) < 0$

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

<0

- ▷ I flussi di cassa sono:
  - ⋆ in t, $-B(t,s)+B(t,u)$
  - ⋆ in s, $1-B(s,u)$ >0 $\qquad B(s,u)<1$
  - ⋆ in u, $1-1=0$

  essendo il flusso in s dato da $1-B(s,u)>0$ (da (3)), il flusso in t deve essere $-B(t,s)+B(t,u)<0$, cioè $B(t,u)<B(t,s)$ altrimenti ci sarebbe un arbitraggio.
- ▷ quindi i tassi sono (sempre) positivi sse la 'discount function' è (sempre) decrescente.

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

- ▷ Fissiamo $t<s<u$;
  - ⋆ partendo dalla

$$B(t,u)=B(t,s)\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

sostituendo i tassi a pronti si trova

$$\mathrm{e}^{-(u-t)r(t,u)}=\mathrm{e}^{-(s-t)r(t,s)}\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

$r(t,s)<r(t,u)<f(t,s,u)$

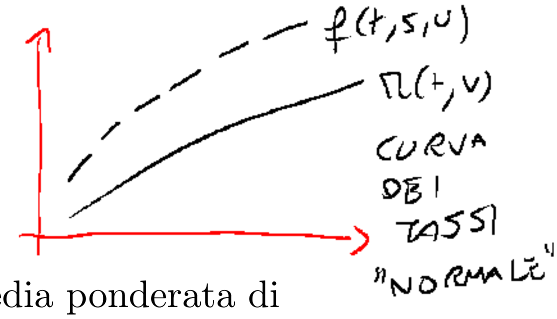
$r(t,s)>r(t,u)>f(t,s,u)$

  - ⋆ passando ai logaritmi e esplicitando $r(t,u)$,

$$\boxed{r(t,u)=\frac{s-t}{u-t}r(t,s)+\frac{u-s}{u-t}f(t,s,u)}$$

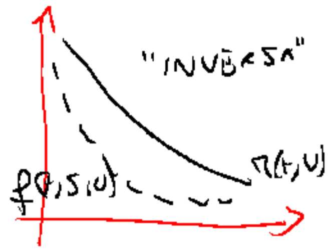
cioè il tasso 'a lungo termine' $r(t,u)$ è media ponderata del tasso 'a breve termine' $r(t,s)=f(t,t,s)$ e del tasso forward $f(t,s,u)$;

Tassi a pronti e a Termine

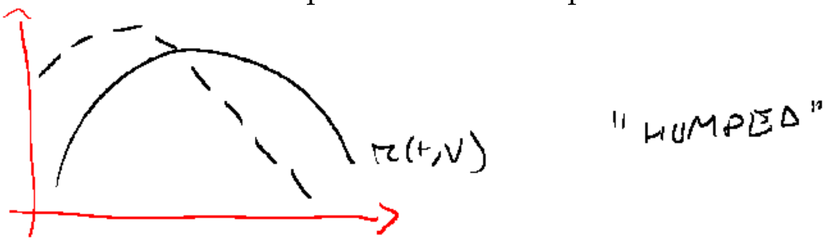


▷ Dalla relazione che esprime $r(t,u)$ come media ponderata di $r(t,s)$ e $f(t,s,u)$ si trova che, per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}\ (t < s < u)$

$$r(t,s) > r(t,u) \Leftrightarrow r(t,s) > r(t,u) > f(t,s,u)$$
$$r(t,s) < r(t,u) \Leftrightarrow r(t,s) < r(t,u) < f(t,s,u).$$



▷ Ne segue che
- ⋆ Se la struttura dei tassi a pronti è crescente (descrescente) allora è dominata dai (domina i) tassi a termine.
- ⋆ Quando la curva dei tassi a pronti 'cambia andamento', cioè passa da crescenza a decrescenza o viceversa, allora la curva dei tassi a termine 'attraversa' quella dei tassi a pronti.



Tassi e Intensità

▷ In luogo delle intensità di interesse, $r(t,s)$ (spot) e $f(t,s,u)$ (forward), si possono utilizzare i corrispondenti tassi di interesse.

▷ Il legame tra queste quantità è dato da

$$\boxed{(1+\text{tasso})^{\text{periodo}} = \mathrm{e}^{\text{periodo}\cdot\text{intensità}}.}$$

▷ Avremo quindi i tassi $i(t,s)$ (spot) e $i_f(t,s,u)$ (forward), definiti da

$1+i=e^{\delta}$

$$1+i(t,s) = \mathrm{e}^{r(t,s)}$$
$$1+i_f(t,s,u) = \mathrm{e}^{f(t,s,u)},$$

$(1+i(t,s))^{s-t} = e^{(s-t)r(t,s)}$

e legati da

$1+i(t,u) = [1+i(t,s)]^{\frac{s-t}{u-t}}\,[1+i_f(t,s,u)]^{\frac{u-s}{u-t}}$

$$(1+i(t,u))^{u-t} = (1+i(t,s))^{s-t}(1+i_f(t,s,u))^{u-s},$$

$x^p \cdot y^{1-p}$

quindi il fattore di capitalizzazione 'a lungo' $1+i(t,u)$ è media geometrica dei corrispondenti fattori 'a breve' e a termine.

$x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}$ $\quad p_i > 0 \quad \sum p_i = 1$

INTERESSE COMPOSTO | INTERESSE SEMPLIC

	TASSI	INTENSITÀ	TASSI
PRONTI (SPOT)	$i(t,s)$	$r(t,s)$	$L(t,s)$
TERMINE (FWD)	$i_f(t,s,u)$	$f(t,s,u)$	$L_f(t,s,u)$

$$f(t,s) = f(t,s,s^+)$$

SCADENZA IMMEDIATAMENTE SUCCESSIVA A s

$\Updownarrow$

$r(t,s)$

$B(t,s)$ ...

Tassi Semplici

- A volte si calcola il rendimento di un'operazione basandosi su tassi semplici (cioè in regime di interesse semplice), soprattutto per investimenti di durata inferiore a 1 anno.
- Definiamo allora il **tasso semplice** a pronti in t per l'epoca s, $L(t,s)$, con $t,\ s \in \mathbb{T}$ e $t \leq s$, come il tasso in regime di interesse semplice corrispondente ad un investimento tra t e s:

1+ TASSO x PERIODO

$$B(t,s) = \frac{1}{1 + L(t,s)(s-t)},$$

da cui si ricava

$$L(t,s) = \frac{1}{s-t}\left[\frac{1}{B(t,s)} - 1\right].$$

- La **struttura per scadenza dei tassi semplici** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to L(t,s), \quad s \geq t, \ s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la curva dei tassi semplici.

Tassi semplici a termine

- Il tasso semplice a termine in t per il periodo $[s,u]$, $L_f(t,s,u)$, con $t \leq s < u$ e $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ è definito implicitamente da

$$\underbrace{(1 + \overset{3\%}{L(t,s)}(s-t))}_{t \longrightarrow S}\underbrace{(1 + L_f(\overset{?}{t},s,u)(u-s))}_{\longrightarrow 0} = (\overset{t \longrightarrow u}{1 + L(t,u)(u-t)}),$$

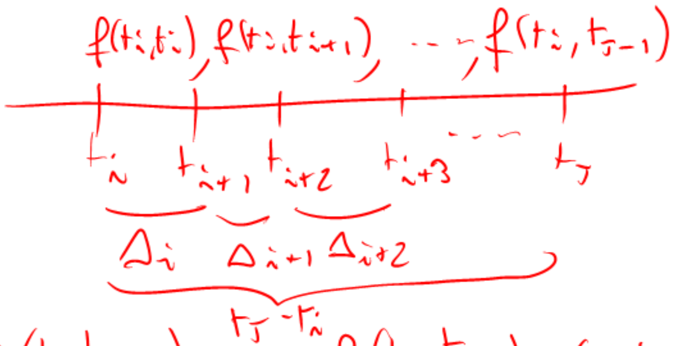
8%

- Il legame con le altre quantità introdotte in precedenza è dato da:

$$\begin{aligned} L_f(t,s,u) &= \frac{1}{u-s}\left[\frac{1 + L(t,u)(u-t)}{1 + L(t,s)(s-t)} - 1\right] \\ &= \frac{1}{u-s}\left[\frac{B(t,s)}{B(t,u)} - 1\right] \\ &= \frac{e^{(u-s)f(t,s,u)} - 1}{u-s}. \end{aligned}$$

- Il tasso a lungo semplice non è media di tasso breve e tasso forward //

$$r(t_i, t_J) =$$



$$= -\frac{1}{t_J - t_i} \log B(t_i, t_J) =$$

$$= -\frac{1}{t_J - t_i} \log \left(\underbrace{\frac{B(t_i,t_J)}{B(t_i,t_{J-1})}} \underbrace{\frac{B(t_i,t_{J-1})}{B(t_i,t_{J-2})}} \frac{B(t_i,t_{J-2})}{\dots} \cdots \frac{B(t_i,t_{i+2})}{B(t_i,t_{i+1})} \underbrace{\frac{B(t_i,t_{i+1})}{1}} \right)$$

$$= \frac{1}{t_J - t_i} \left(\Delta_{J-1} f(t_i, t_{J-1}) + \Delta_{J-2} f(t_i, t_{J-2}) + \dots + \Delta_i f(t_i, t_i) \right)$$

$$r(t_i, t_J) = \frac{1}{t_J - t_i} \sum_{l=i}^{J-1} \Delta_l \cdot f(t_i, t_l)$$

MEDIA PONDERATA DI $f(t_i, t_i), \dots, f(t_i, t_{J-1})$

$$\Delta_i + \Delta_{i+1} + \dots + \Delta_{J-1} = t_J - t_i$$

Scadenzario Discreto

- Consideriamo il caso $\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots\}$;
  - ⋆ poniamo $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ per $i \geq 0$.
  - ⋆ Per $t_i, t_j \in \mathbb{T}$ con $t_i \leq t_j < \sup \mathbb{T}$, definiamo **il tasso a termine uniperiodale** in t_i per t_j, $f(t_i, t_j)$, come il tasso a termine dell'investimento stabilito in t_i, che comincia in t_j e termina nell'epoca successiva t_{j+1}:

$$f(t,s,u) = -\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t,u)}{B(t,s)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t_i, t_j) &= f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= -\frac{1}{\Delta_j} \log \frac{B(t_i, t_{j+1})}{B(t_i, t_j)}. \end{aligned}}$$

$t_i \quad t_j \quad t_{j+1}$

- La **struttura dei tassi a termine uniperiodali** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione $(s,u) \longrightarrow f(t,s,u)$

$$s \to f(t, s), \quad t < s < \sup \mathbb{T}, \ t, \ s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine uniperiodali**.

Scadenzario Discreto

- Dai tassi uniperiodali si possono ricostruire le altre quantità:
  - ⋆ I prezzi dei TCN e i tassi a pronti: per $t_i < t_j$ con $t_i, \ t_j \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i, t_j) = \mathrm{e}^{-\sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{1}{t_j - t_i} \sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l), \quad 4$$

  - ⋆ I tassi a termine: per $t_i \leq t_j < t_k$, con $t_i, \ t_j, \ t_k \in \mathbb{T}$,

$$\underline{f(t_i, t_j, t_k)} = \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{l=j}^{k-1} \Delta_l f(t_i, t_l).$$

MEDIA PONDERATA

$f(t,s,u)$
$s=t$

  - ⋆ I tassi a pronti e a termine sono medie ponderate dei tassi uniperiodali sui corrispondenti periodi di investimento.
- Definiamo ancora il **tasso a pronti uniperiodale** in $t_i \in \mathbb{T}$ con $t_i < \sup \mathbb{T}$, $r(t_i)$, come

$$r(t_i) = f(t_i, t_i) = r(t_i, t_{i+1}) = -\frac{1}{\Delta_i} \log B(t_i, t_{i+1})$$

cioè $B(t_i, t_{i+1}) = \mathrm{e}^{-\Delta_i \, r(t_i)}$.

Tassi Semplici Uniperiodali

- In regime di interesse semplice, si definiscono i corrispondenti tassi semplici uniperiodali a termine:

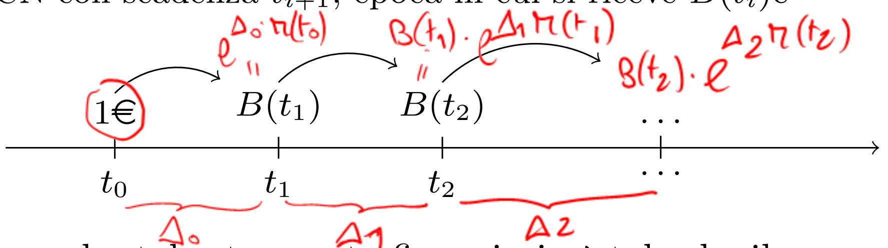
$$\begin{aligned} L_f(t_i, t_j) &= L_f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_j}\left[\frac{B(t_i, t_j)}{B(t_i, t_{j+1})} - 1\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\Delta_j f(t_i, t_j)} - 1}{\Delta_j}, \end{aligned}$$

- e quello a pronti:

$$\begin{aligned} L(t_i) = L_f(t_i, t_i) &= L(t_i, t_{i+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{1}{B(t_i, t_{i+1})} - 1\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\Delta_i\, r(t_i)} - 1}{\Delta_i}. \end{aligned}$$

Money Market Instrument

- Chiamiamo **money market instrument** il titolo, il cui prezzo all'epoca t è indicato con $B(t)$, costruito a partire dai TCN di tutte le scadenze mediante la seguente strategia (detta roll-over):
  - ⋆ in $t_0 = 0$, 1€ viene investito in TCN con scadenza t_1, epoca in cui si riceve l'ammontare $B(t_1) = \mathrm{e}^{\Delta_0\, r(0)}$; $r(t_0, t_1) = r(t_0)$ $\quad t_0 = 0$
  - ⋆ ad ogni epoca successiva t_i, l'ammontare $B(t_i)$ viene investito in TCN con scadenza t_{i+1}, epoca in cui si riceve $B(t_i)\mathrm{e}^{\Delta_i\, r(t_i)}$; $r(t_1, t_2) = r(t_1)$



- Riassumendo, tale strumento finanziario è tale che il suo prezzo verifica la $B(0) = B(t_0) = 1$ e, per $t_i \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i) = \underbrace{\mathrm{e}^{\sum_{l=0}^{i-1} \Delta_l\, r(t_l)}} = \prod_{l=0}^{i-1} \frac{1}{B(t_l, t_{l+1})} = \underbrace{\prod_{l=0}^{i-1} (1 + \Delta_l L(t_l))}.$$

Tassi EURIBOR - t_i=1/12/06

$t_j - t_i$	$L(t_i, t_j)$
1s	3.33
2s	3.45
3s	3.52
1m	3.59
2m	3.62
3m	3.64
4m	3.68
5m	3.72
6m	3.74
7m	3.77
8m	3.79
9m	3.81
10m	3.83
11m	3.84
12m	3.85

← TASSI SEMPLICI

Tassi EURIBOR composti - t_i=1/12/06

TASSI A TERMINE UNIPERIODALI

$L(t_i, t_j)$
$\to B(t_i, t_j)$
$\to r(t_i, t_j)$
$\to f(t_i, t_{j-1})$

$t_j - t_i$	$r(t_i, t_j)$	$f(t_i, t_{j-1})$
1s	3.33	3.33
2s	3.45	3.57
3s	3.52	3.65
1m	3.58	3.73
2m	3.61	3.63
3m	3.62	3.66
4m	3.66	3.76
5m	3.69	3.83
6m	3.71	3.77
7m	3.73	3.87
8m	3.74	3.84
9m	3.76	3.86
10m	3.77	3.89
11m	3.77	3.81
12m	3.78	3.82

$$\lim_{u \downarrow s} f(t,s,u) = \lim_{u \downarrow s} -\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t,u)}{B(t,s)}$$

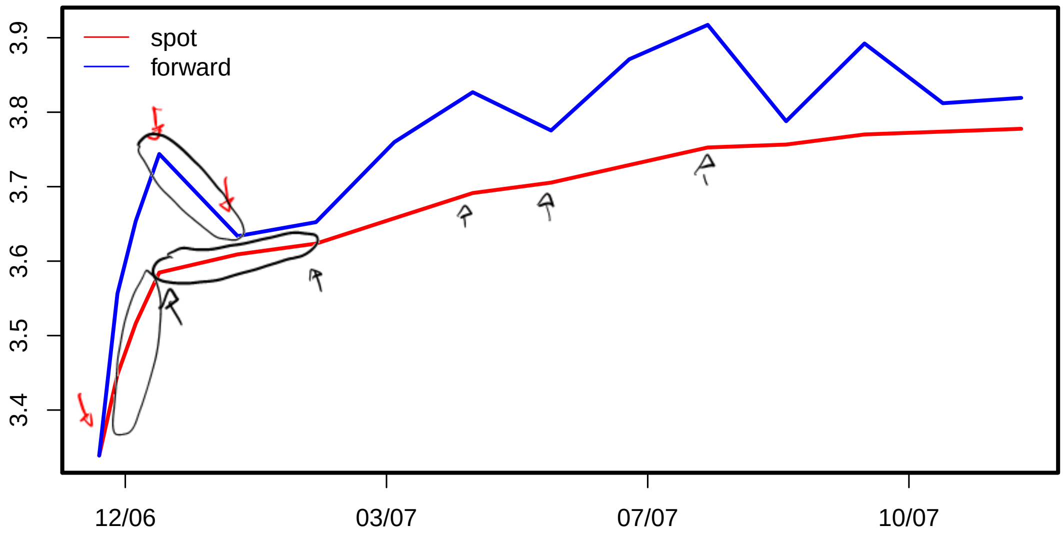
$$= -\lim_{u \downarrow s} \frac{\log B(t,u) - \log B(t,s)}{u-s}$$

RAPPORTO INCREMENTALE DI $\log B(t,u)$ FISSO TRA s E u

$$= -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t,s)$$

$$\left. = -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)}{B(t,s)} \right\}$$ SEMI ELASTICITÀ (VARIAZIONE %)

Tassi a Pronti e a Termine



Scadenzario Continuo

▷ Nel caso $\mathbb{T} = [0, T]$ oppure $\mathbb{T} = [0, +\infty[$, per $t, s \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < \sup \mathbb{T}$ definiamo il **tasso forward istantaneo** in t per s come (assumendo che il limite esista)

$$f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} f(t, s, u).$$

▷ Riesce

$$\begin{aligned} \boxed{f(t, s)} &= \lim_{u \downarrow s} \left(-\frac{1}{u - s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)} \right) \\ &= -\lim_{u \downarrow s} \frac{\log B(t, u) - \log B(t, s)}{u - s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s) \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)}. \end{aligned}$$

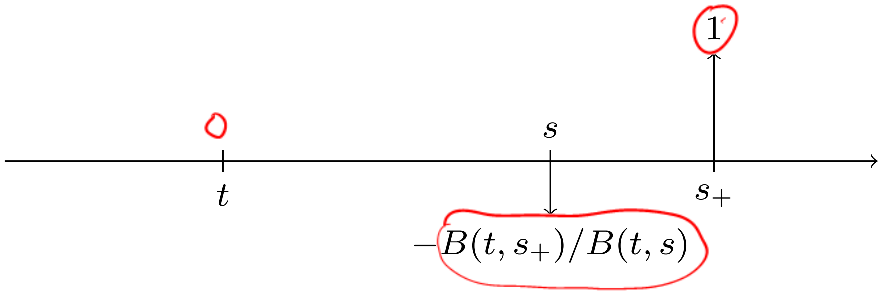
Scadenzario Continuo

- Interpretazione:
  - '$f(t,s) = f(t,s,s_+)$', cioè $f(t,s)$ è il tasso a termine istantaneo $=$ concordato in t, per un investimento che inizia in s e finisce un istante dopo (in s_+).
  - Infatti consideriamo l'operazione concordata in t, in cui acquisto un TCN che scade in $s_+ = s + \Delta s$ (con $\Delta s > 0$) e vendo $B(t,s_+)/B(t,s)$ TCN con scadenza s. Il costo in t di tale operazione è 0

ESEMPIO
$\Delta s = 1$ GIORNO

$$\frac{B(t,s_+)}{B(t,s)} B(t,s) - B(t,s_+) = 0,$$

per cui la situazione è



Tassi forward istantanei

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\Delta s = s_+ - s$

TAYLOR

$1 - \frac{B(t,s_+)}{B(t,s)} \approx 1 - \frac{B(t,s) + \frac{\partial B(t,s)}{\partial s} \Delta s}{B(t,s)}$

- L'interesse generato da tale operazione è

$\frac{\partial}{\partial s} B(t,s) = -f(t,s) B(t,s)$

$$\begin{aligned} \text{Montante} - \text{Capitale iniziale} &= 1 - \frac{B(t,s_+)}{B(t,s)} \\ &\cong 1 - \frac{B(t,s) - f(t,s)B(t,s)\Delta s}{B(t,s)} \\ &= \boxed{f(t,s)}\Delta s. \end{aligned}$$

$= \frac{\cancel{B} - \cancel{B} + fB\Delta}{B}$

- La **struttura dei tassi a termine istantanei** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to f(t,s), \quad t,s \in \mathbb{T}, \ t \le s < \sup \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine istantanei**.

$f(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t,s)$

Tassi forward istantanei

▷ Dai tassi istantanei si ricavano tutte le altre quantità.

⋆ infatti riesce, per $t,\ s \in \mathbb{T}$ con $t < s$,

FISSATO

$$\begin{aligned}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v &= -\int_t^s \frac{\partial}{\partial v}\log B(t,v)\mathrm{d}v \\ &= -[\log B(t,s) - \log \overbrace{B(t,t)}^{=1}] \\ &= -\log B(t,s),\end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{B(t,s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v}}.$$

⋆ Noti i prezzi si possono trovare anche gli altri tassi in funzione di quelli istantanei.

$$= e^{-(s-t)r(t,s)}$$

$$\Rightarrow r(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v$$

$r(t,s) =$ MEDIA (INTEGRALE) DI $f(t,v)$, $t \le v \le s$

Tassi forward istantanei

SE $v \to f(t,v)$ CRESCENTE

$\Rightarrow f(t,t) \le r(t,s) \le f(t,s)$

$f(t,t) = r(t)$

▷ ⋆ Si trova infatti che per $t,\ s \in \mathbb{T}$ con $t < s$

$$\begin{aligned}r(t,s) &= -\frac{1}{s-t}\log B(t,s) \\ &= \underbrace{\frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v}, \end{aligned}$$

⋆ più in generale, per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ con $t \le s < u$,

$$r(t,u) = \frac{s-t}{u-t} r(t,s) + \frac{u-s}{u-t} f(t,s,u)$$

$$\begin{aligned}f(t,s,u) &= \frac{u-t}{u-s}r(t,u) - \frac{s-t}{u-s}r(t,s) \\ &= \frac{1}{u-s}\left(\int_t^u f(t,v)\mathrm{d}v - \int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{1}{u-s}\int_s^u f(t,v)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

MEDIA INTEGRALE

⋆ Quindi i tassi $r(t,s)$ e $f(t,s,u)$ sono le medie dei tassi istantanei sui corrispondenti periodi di investimento.

$r(t,s)$ A PRONTI

$f(t,s,u)$ A TERMINE

$f(t,s)$ A TERMINE, ISTANTANEO

$r(t)$ A PRONTI, ISTANTANEO

Tasso a pronti istantaneo

▷ Possiamo ancora definire, per $t \in \mathbb{T}$ con $t < \sup \mathbb{T}$, il **tasso a pronti istantaneo** come

$f(t,S) = \lim_{u \downarrow S} f(t,S,u) \qquad S = t$

$r(t) = \lim_{u \downarrow t} \underbrace{f(t,t,u)}_{r(t,u)}$

$$
\begin{aligned}
r(t) &= f(t,t) \\
&= \lim_{s \downarrow t} r(t,s) \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial s} \log B(t,s)\right]_{s=t} = -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)\big|_{s=t}}{\underbrace{B(t,s)\big|_{s=t}}_{=B(t,t)=1}} \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)\right]_{s=t}
\end{aligned}
$$

quindi è il tasso che remunera un investimento che inizia in t e finisce immediatamente dopo (in '$t_+ = t + \Delta t$').

MODELLI DINAMICI PER LA CURVA DEI TASSI

MOLTI SI BASANO SU $r(t)$

TASSO ISTANTANEO DI LUNGO PERIODO (MEDIO)

VASICEK (1977)

VELOCITÀ

$$\underbrace{dr(t)}_{\substack{\text{VARIAZIONE IN } r(t) \\ \approx r(t+dt) - r(t)}} = a\left(b - r(t)\right)dt + \underbrace{\sigma\, dW(t)}_{\text{SHOCK}}$$

MOTO BROWNIANO

$r(t) \sim N(\; , \;)$

Tasso semplici istantanei

▷ Se partiamo dai tassi semplici e definiamo in maniera analoga a prima i tassi istantanei $L(t,S)$

$$L_f(t,s) = \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u), \quad L(t) = L_f(t,t),$$

$L_f(t,s) = f(t,S)$

si trova

$$\underbrace{1 + (u-t)L(t,u)}_{1/B(t,u)} = \underbrace{[1 + (S-t)L(t,S)]}_{1/B(t,S)} \cdot [1 + (u-S) \cdot L_f(t,S,u)]$$

$$
\begin{aligned}
L_f(t,s) &= \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u) \\
&= \lim_{u \downarrow s} \frac{B(t,s) - B(t,u)}{(u-s)B(t,u)} \\
&= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)}{B(t,s)} \\
&= f(t,s)
\end{aligned}
$$

e quindi anche $L(t) = r(t)$. I tassi istantanei sono gli stessi in regime di interesse composto e semplice.

Money Market Instrument

▷ Possiamo infine definire il **money market instrument** o **conto bancario** come il titolo (supposto esistente), il cui prezzo all'epoca t si indica con $B(t)$, costruito a partire dai TCN relativi a tutte le scadenze:

ROLL-OVER

- ⋆ si parte con 1€ all'epoca 0;
- ⋆ in ogni istante t il valore di questo titolo viene investito in TCN che scadono immediatamente dopo, e così via. Formalmente, il prezzo del titolo verifica

$r(t)dt$

$t \quad t_+$

$$\begin{cases} B(0) = 1 \\ \mathrm{d}B(t) = \boxed{B(t)}\,\boxed{r(t)}\,\mathrm{d}t, \end{cases}$$

$$\int_0^t \frac{dB(t)}{B(t)} = \int_0^t r(t)\,dt$$

- ⋆ quindi si trova

$$B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(v)\mathrm{d}v}.$$

Struttura per scadenza deterministica

$r(0,t),\ B(0,t)$

▷ all'istante di valutazione $t = 0$ conosciamo la struttura per scadenza corrente ma non evidentemente la sua evoluzione futura, cioè $B(s, u)$ (e quindi $r(s, u)$, $r(s)$, $B(s)$, ...) con $0 < s \le u$ sono variabili aleatorie.

▷ se assumiamo che le varie quantità $B(s, u)$ siano in realtà **deterministiche** (non aleatorie) allora, in assenza di opportunità di arbitraggio, le seguenti proprietà equivalenti devono sussistere

SCINDIBILITÀ

1. $B(t, u) = B(t, s)B(s, u)$ per ogni $t \le s \le u$
2. $f(t, s, u) = r(s, u)$ per ogni $t \le s < u$ TASSI A PRONTI FUTURI = TASSI A TERMINE OGGI
3. $f(t, s) = r(s)$ per ogni $t < s$
4. $B(t, s) = \frac{B(t)}{B(s)}$

e quindi

$$B(t, s) = \mathrm{e}^{-\sum_{t \le t_j < s} \delta_j r(t_j)}$$

Δ

nel caso di scadenzario discreto, mentre nel caso di scadenzario continuo

$$\boxed{B(t, s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s r(v)\mathrm{d}v}}$$

$r(v) = \delta(v)$ IN MAT. FINANZIARIA

$B(t,u) = B(t,s)\, e^{-(u-s) f(t,s,u)}$

$r(s,u)$ NOTO

STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

$B(t,u) = B(t,s)\, e^{-(u-s) r(s,u)}$

- che la (1) (o la (2)) segue dall'assenza di arbitraggi è immediato essendo $B(s,u)$ (o $r(s,u)$) noto in $t < s$ e quindi deve essere

$$B(t,u) = B(t,s)B(s,u) = B(t,s)\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

cioè l'attualizzazione tra s e u avviene al tasso $r(s,u)$ o $f(t,s,u)$, che devono quindi coincidere.
la (2) implica la (3), basta prendere $u = s+$ nel caso di scadenzario discreto e $\lim_{u \downarrow s}$ in caso di scadenzario continuo.
la (4) segue poi dalla (3), essendo ad esempio nel caso di scadenzario continuo

$$B(t,s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s \overbrace{f(t,u)}^{=r(u)}\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{-\int_t^s r(u)\mathrm{d}u} = \frac{B(t)}{B(s)}$$

$1/B(s)$

$e^{-\int_0^s r(u)du}$

$=$

$e^{-\int_0^t r(u)du}$

$1/B(t)$

per finire, è subito visto che la (4) implica la (1):

$$B(t,u) = \frac{B(t)}{B(u)} = \frac{B(t)}{B(s)}\frac{B(s)}{B(u)} = B(t,s)B(s,u).$$

$f(t,s,u) \overset{?}{=} r(s,u)$

$f(t,s,u) \neq E_t[r(s,u)]$

ASPETTATIVE PURE

(STATICO)

Un Modello Parametrico: Nelson-Siegel (1987)

- $\mathbb{T} = [0, \infty[$.
  - ⋆ Fissiamo $t \geq 0$; il modello specifica la forma dei tassi forward istantanei all'epoca t per ogni scadenza successiva:

$$f(t,s) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-(s-t)/a} + \beta_2 \frac{s-t}{a}\mathrm{e}^{-(s-t)/a}, \quad = g(s-t)$$

  con $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Il modello dipende da 4 parametri.
  - ⋆ $f(t,s)$ dipende solo dall'ampiezza del periodo $s-t$. Nel seguito possiamo allora considerare $t = 0$:

$$\boxed{f(0,t) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a}\mathrm{e}^{-t/a}.}$$

- Questo modello e sue varianti vengono usato frequentemente per descrivere e/o stimare la curva dei tassi.
- https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

$r(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,v)dv$

. . . Nelson-Siegel

$\frac{1}{t}\int_0^t \left(\left(\beta_0 + \beta_1 e^{-u/a} + \beta_2 \frac{u}{a} e^{-u/a}\right) du\right.$

▷ Deriviamo le altre quantità:

⋆ i tassi a pronti sono dati da

$\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(1+x)$

$$r(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(0,u)\mathrm{d}u$$

$$\underbrace{= \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\frac{1-\mathrm{e}^{-t/a}}{t/a} - \beta_2\mathrm{e}^{-t/a}.}_{\text{LINEARE IN } \beta_0, \beta_1, \beta_2}$$

⋆ Più in generale, i tassi forward per l'intervallo $[s,u]$ sono

$$f(0,s,u) = \frac{1}{u-s}\int_s^u f(0,v)\mathrm{d}v$$

$$= \beta_0 + \frac{\beta_1+\beta_2}{(u-s)/a}\left(\mathrm{e}^{-s/a} - \mathrm{e}^{-u/a}\right)$$

$$+ \frac{\beta_2}{u-s}\left(s\mathrm{e}^{-s/a} - u\mathrm{e}^{-u/a}\right).$$

. . . Nelson-Siegel

$B(t,s) = e^{-(s-t)\, r(t,s)}$

▷ ⋆ Infine, i prezzi dei TCN (la 'discount function') sono

$$B(0,t) = \mathrm{e}^{-t\, r(0,t)}$$

$$= \mathrm{e}^{-t\beta_0 - (\beta_1+\beta_2)a(1-\mathrm{e}^{-t/a}) + \beta_2 t\mathrm{e}^{-t/a}}$$

$\beta_0 + \beta_1 \cdots + \beta_2 \cdots$

$\hat{r}(0,t_i)$

▷ Osserviamo che, fissato a, i tassi (a pronti o a termine) dipendono da β_0, β_1, β_2 in maniera lineare ⇒ regressione lineare può essere usata per stimare i parametri (con a fissato).

▷ Interpretazione dei parametri:

⋆ $f(0,t)$ è somma di tre componenti:

$$f(0,t) = c_1(t) + c_2(t) + c_3(t),$$

con

$$c_1(t) = \beta_0,\ c_2(t) = \beta_1\mathrm{e}^{-t/a},\ c_3(t) = \beta_2\frac{t}{a}\mathrm{e}^{-t/a}.$$

. . . Nelson-Siegel

$c_2(t) = \beta_1 e^{-t/a}$

$c_3(t) = \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a}$

▷ Riesce

- ⋆ c_1 è costante: $\underbrace{\lim_{t\to 0} c_1(t)}_{c_1(0)} = \lim_{t\to\infty} c_1(t) = \beta_0$;
- ⋆ c_2 è monotona decrescente se $\beta_1 > 0$, crescente se $\beta_1 < 0$, (costante se $\beta_1 = 0$).
  Inoltre $\lim_{t\to 0} c_2(t) = c_2(0) = \beta_1$ e $\lim_{t\to\infty} c_2(t) = 0$.
- ⋆ Se $\beta_2 = 0$, $c_3(t)$ è costante. Se $\beta_2 > 0$, c_3 cresce fino a $t^* = a$ e poi decresce (t^* è punto di massimo assoluto). Se invece $\beta_2 < 0$, c_3 decresce fino a t^* e poi è crescente (t^* punto di minimo assoluto). Inoltre riesce $\lim_{t\to 0} c_3(t) = \lim_{t\to\infty} c_3(t) = 0$.

▷ Di conseguenza, si può interpretare

- ⋆ c_1 come componente di lungo termine (è l'unica che ha limite non nullo in ∞),
- ⋆ c_2 come componente di breve termine (il limite in 0 è non nullo)
- ⋆ e c_3 come componente di medio periodo (ha limite 0 sia in 0 che in ∞).

. . . Nelson-Siegel

▷ Osserviamo ancora che

- ⋆ Il tasso istantaneo per una scadenza 'infinita' è

$$f(0,\infty) = \lim_{t\to\infty} f(0,t) = \beta_0.$$

- ⋆ Il tasso istantaneo a pronti ('spot rate') è

$\beta_1 = r(0) - f(0,\infty)$

= "SPREAD BREVE-LUNGO"

$$r(0) = f(0,0) = r(0,0) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \beta_0 + \beta_1.$$

- ⋆ Il parametro a è un parametro di ~~posizione~~ SCALA: non cambia il 'tipo di andamento' della curva dei tassi, ma la 'comprime' (se a piccolo) o 'allunga' (se a grande) infatti, è $f(0,t;a) = f(0,kt;ka)$.

▷ Per $r(0,t)$ si possono fare le stesse osservazioni che per $f(0,t)$. In particolare $r(0,\infty) = \beta_0$, $r(0,0) = r(0) = \beta_0 + \beta_1$, e le forme di $s \to r(t,s)$ possono essere costanti, monotone o campanulari.

▷ In **R**: pacchetti **fBonds**, **NMOF**, **YieldCurve**, **termstrc**

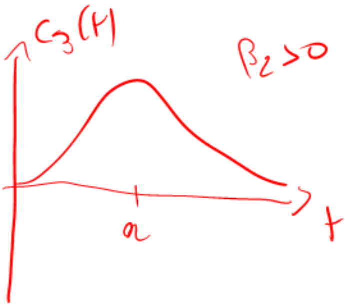
$$C_3(t) = \beta_2 \underbrace{\frac{t}{a} e^{-\frac{t}{a}}}_{h(t)}$$

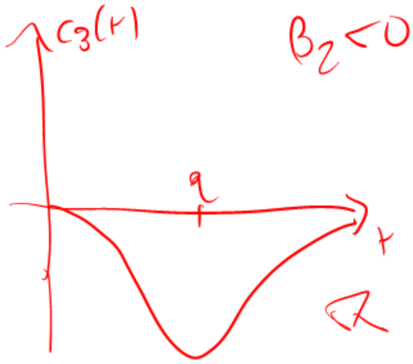
$$h(0) = 0$$

$$h'(t) = \frac{e^{-t/a}}{a} - \frac{t}{a^2} e^{-t/a} = \underbrace{\frac{e^{-t/a}}{a}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{a}\right)}_{\substack{>0 \iff t<a \\ < \quad t>a}}$$

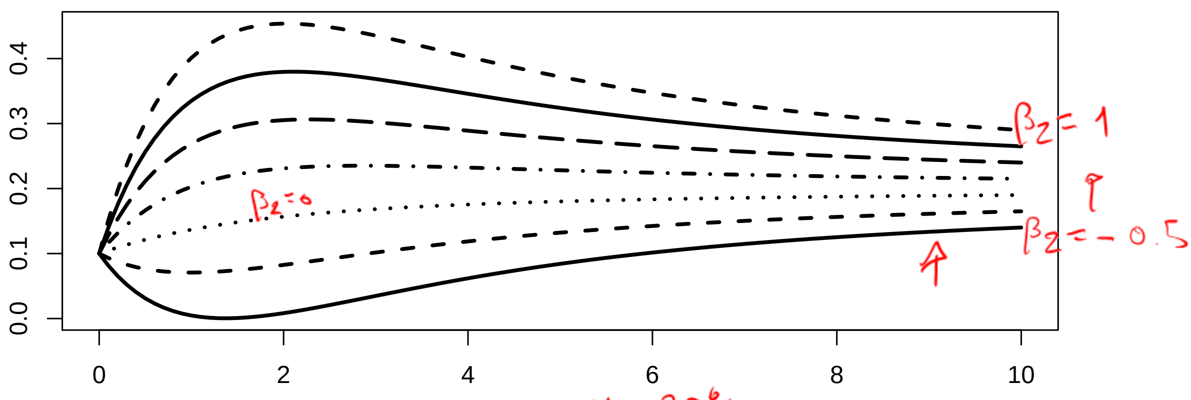
$t^* = a$ PUNTO DI MAX (ASSOLUTO) PER h

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \frac{\overset{+\infty}{t}}{a} \underbrace{e^{-t/a}}_{\to 0} = 0$$





. . . Nelson-Siegel



$f(0,\infty) = r(0,\infty) = 20\%$

$\Rightarrow r(0) = f(0,0) = 10\%$

Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,$
$\beta_2 = -0.5,\ -0.25,\ 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$

. . . Nelson-Siegel

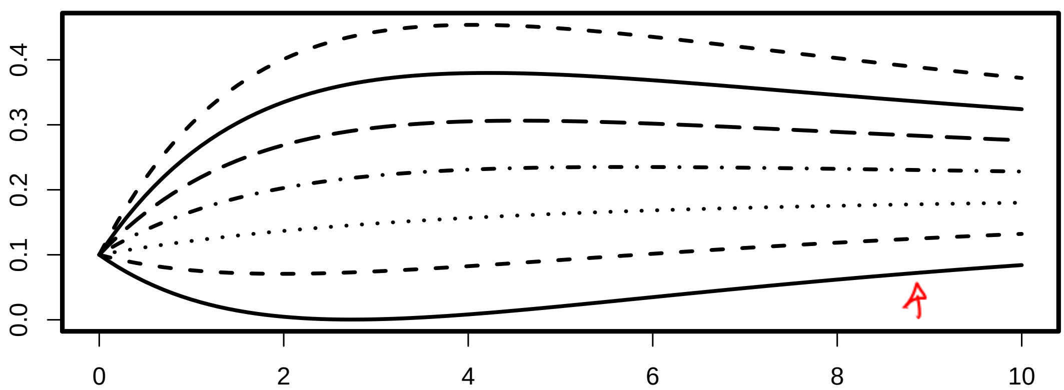


Figura: $r(0,t)$: $a = 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,$
$\beta_2 = -0.5,\ -0.25,\ 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$

. . . Nelson-Siegel

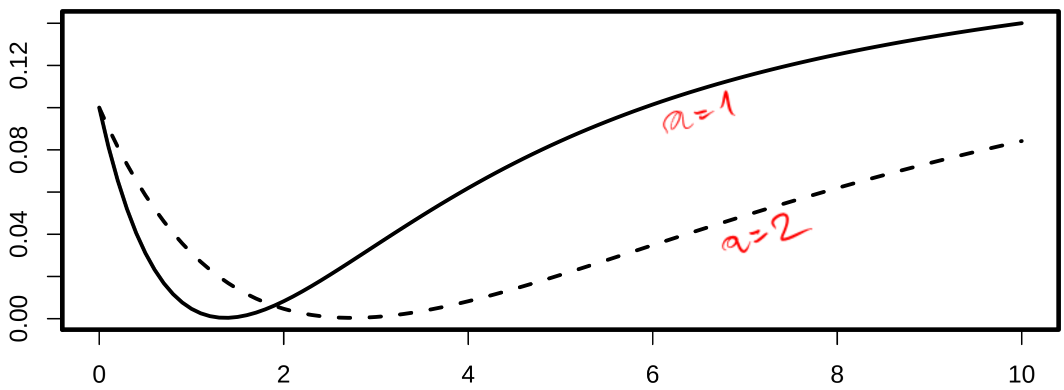
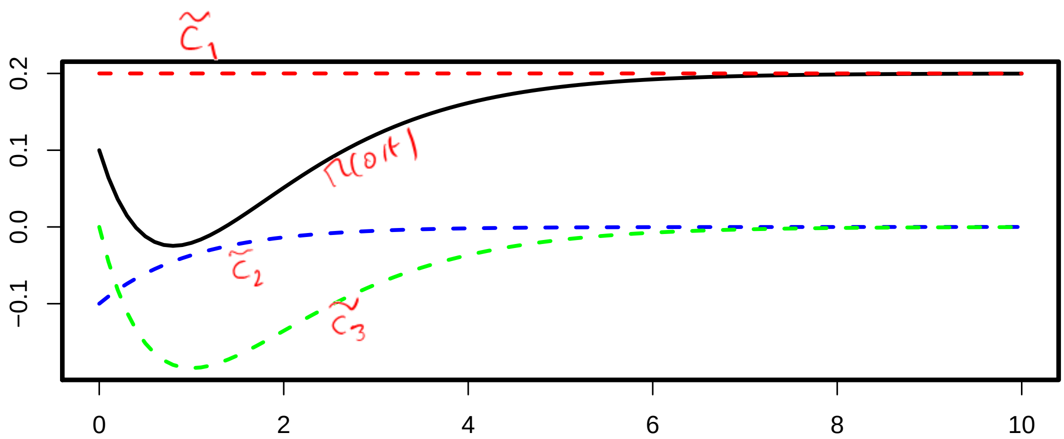


Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,\ \beta_2 = -0.5$

. . . Nelson-Siegel



$r(0,t) = \tilde{c}_1(t) + \tilde{c}_2(t) + \tilde{c}_3(t)$

Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,\ \beta_2 = -0.5$

Proprietà Empiriche della Curva dei Tassi

- ▷ Le curve dei tassi che si osservano in pratica rientrano fra le seguenti forme:

SVENSSON

N-S

  - ⋆ **piatta** (flat);
  - ⋆ **crescente** (normale);
  - ⋆ **decrescente** (invertita);
  - ⋆ **campanulare** (humped);
  - ⋆ **a S** o a cucchiaio.

- ▷ La famiglia di curve dei tassi del tipo Nelson-Siegel cattura le prime 4 forme.
- ▷ Al fine di riprodurre anche l'ultima forma, sono state proposte alcune estensioni di Nelson-Siegel, in particolare il modello di Svensson:

$$f(0,t) = \beta_0 + \overbrace{\beta_1 \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a}}^{\text{N-S}} + \overbrace{\beta_3 \frac{t}{a_1} \mathrm{e}^{-t/a_1}}^{\text{NUOVO TERMINE}}.$$

6 PARAMETRI

Valore di un Flusso di Cassa

CERTI

- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi ad un'epoca $t \in \mathbb{T}$, deriviamo il prezzo di un titolo che paga flussi pari a $I_h \geq 0$ in t_h, $h = 1, \ldots, n$, con $t < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Indicato con P tale prezzo, deve essere

LEGGE DEL PREZZO UNICO

$$P = \overbrace{\sum_{h=1}^{n} I_h B(t, t_h)}^{\text{COSTO DEL PORTAFOGLIO}} = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t,t_h)(t_h - t)}.$$

ACQUISTO IN t I_h TCN CON SCADENZA t_h

- ▷ Infatti la strategia in cui acquisto in t la quantità I_h di TCN con scadenza t_h ($h = 1, \ldots, n$) produce gli stessi flussi di cassa del titolo in questione, quindi per la legge del prezzo unico il prezzo del titolo deve essere uguale al valore della strategia.
- ▷ Il valore del flusso dipende quindi inversamente da un certo numero di punti sulla curva dei tassi (**'fattori di rischio'**).

Yield to Maturity

▷ L'Yield to Maturity (YTM, Redemption Yield, Rendimento a Scadenza) è **il tasso interno di rendimento** (supposto esistente) r dell'operazione in cui si paga P in t e si riceve la sequenza di flussi I_h in t_h, $h = 1, \ldots, n$:

$$\left.\begin{array}{l} r(t,t_1) \\ r(t,t_2) \\ \vdots \\ r(t,t_n) \end{array}\right\} r$$

$I_h > 0$

$e^{r(t_n - t)} \rightarrow$

$r \cdot (t_h - t)$

$$P = \underbrace{\sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t,t_h)(t_h-t)}}_{f(r(t,t_1), \ldots, r(t,t_n))} = \underbrace{\sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t_h-t)}}_{f(r, r, \ldots, r)}.$$

▷ Si tratta quindi di un valore che sintetizza (una 'media') i tassi $r(t, t_h)$, $h = 1, \ldots, n$ e quindi verifica

$$\min_h r(t, t_h) \le r \le \max_h r(t, t_h).$$

SE STRUTTURA PER SCADENZA "NORMALE"

$r(t,t_1) \le r \le r(t,t_n)$

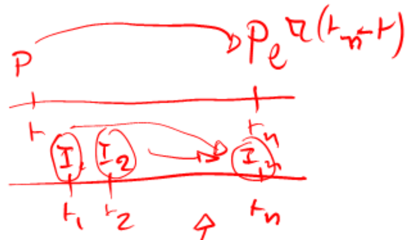
$n = 1$

▷ Per un TCN che scade in $t_n = s$, riesce $\boxed{r = r(t, s).}$

...Yield to Maturity

▷ Ipotesi sottostante l'YTM è che
- ⋆ si detenga il titolo fino a scadenza. ✓
- ⋆ si possa reinvestire al tasso r fino all'ultima epoca ogni cash-flow ricevuto. ✓

Infatti, dalla definizione di YTM si deduce che



$$P\mathrm{e}^{r(t_n-t)} = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{r(t_n-t_h)}.$$

▷ Difetto del YTM è quindi l'assumere una struttura per scadenza ~~piatta~~ dei tassi e trascurare di conseguenza il rischio di reinvestimento.

NEL TEMPO COSTANTE

▷ Tuttavia l'YTM è comunemente usato come misura del rendimento di un'obbligazione.

▷ Se si ragiona in termini di tassi invece che di intensità, indicato con i il tasso interno di rendimento, la relazione è $i = \mathrm{e}^r - 1$.

$e^{-r(t_h - t)} = (1+i)^{-(t_h - t)}$

. . . Coupon Bond

$\Delta = \frac{1}{2}$ — TASSO SEMESTRALE (~ 2)

- ▷ Nel caso di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \ldots, n-1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h\Delta$ per $h = 1, \ldots, n$.
- ▷ Il coupon bond **quota alla pari** (sotto, sopra) se e solo se l'YTM (tasso su base periodale) $i_\Delta = (1+i)^\Delta - 1$ coincide (è maggiore, minore) con il tasso cedolare I/C.
  - ⋆ Riesce infatti, ponendo $v = (1+i)^{-\Delta} = (1+i_\Delta)^{-1}$,

$$P = I \sum_{h=1}^{n} (1+i)^{-h\Delta} + C(1+i)^{-n\Delta}$$
$$= (1 - v^n)\left(I\frac{v}{1-v} - C\right) + C.$$

$P = C \iff i_\Delta = \frac{I}{C}$; $<$ $>$; $>$ $<$

  - ⋆ Quindi $P = C$ se e solo se $I/C = (1-v)/v$ e quindi se e solo se $i_\Delta = I/C$.
- ▷ Ad esempio, un bond con cedole annuali ($\Delta = 1$) pari a 3%, nominale 100 e scadenza ~~10 anni~~ quota alla pari (sotto, sopra) se e solo se l'YTM è $i = 3\%$ $(>, <)$ $(r = 2.96\%)$.

Par Rate

t $\quad t_n, \Delta$

TASSO NOMINALE $= c$

TASSO CEDOLARE $= c \cdot \Delta \cdot 100$

- ▷ Si chiama **par rate** (par yield, tasso di parità) relativo ad una certa scadenza t_n e frequenza Δ il tasso nominale c tale che la corrispondente obbligazione con nominale $C = 100$, che paga cedole $I = c\Delta 100$ in $t_h = t + h\Delta$, quota alla pari.
- ▷ In altri termini il tasso cedolare $c\,\Delta$ è il YTM su base periodale dell'obbligazione.
- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi, deve essere

$$\overset{P}{100} = \underset{c\cdot\Delta\cdot 100}{I} \sum_{i=1}^{n} B(t, t_i) + \overset{C}{100} B(t, t_n),$$

da cui si ricava

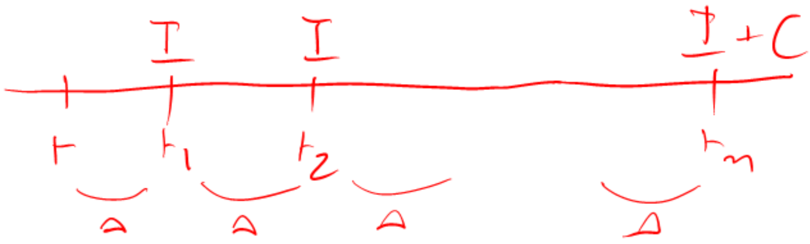
$$c \equiv c(t, n) = \frac{1 - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t, t_h)}.$$

$c(t, n, \Delta)$

- ▷ Per $t \in \mathbb{T}$ fissato, la **struttura per scadenza dei par rate** è

$$n \to c(t, n); \quad n \geq 1.$$

Il suo grafico è la curva dei par rates.



$$P = \sum_{k=1}^{n} I(1+i)^{-k\Delta} + C(1+i)^{-n\Delta}$$

$$= I\sum_{k=1}^{n} v^{k} + C v^{n}$$

$$= I v (1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1}) + C v^{n}$$

$$= I v \frac{1-v^{n}}{1-v} + \underbrace{C v^{n}}_{= C(v^{n}-1+1)}$$

SE $v \neq 1$

$$P = \underbrace{\overbrace{(1-v^{n})}^{\neq 0}\left[I\frac{v}{1-v} - C\right]}_{=0} + C$$

$P = C \iff \ldots = 0 \iff I\frac{v}{1-v} - C = 0$

$>$

$<$

$$\iff I\,\frac{\cancel{\frac{1}{1+i_\Delta}}}{\frac{i_\Delta}{\cancel{1+i_\Delta}}} = C$$

$$\iff i_\Delta = \frac{I}{C}$$

$<$

$>$

$v \equiv v_\Delta = (1+i_\Delta)^{-1} = (1+i)^{-\Delta}$

$1 - v^{n} = 0 \iff v = 1$

$$\boxed{\text{SE } v = 1 \ (i_\Delta = 0) \quad P = nI + C}$$

SOMMA DEI FLUSSI

$i_\Delta > 0$

$$C(t,n) = \frac{1 - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{k=1}^{n} B(t,t_k)} = \frac{1 - B(t,t_1) + B(t,t_1) - B(t,t_2) + B(t,t_2) + \ldots - B(t,t_n)}{\Delta \sum B(t,t_k)}$$

$$= \sum_{J=1}^{n} \frac{B(t,t_{J-1}) - B(t,t_J)}{\Delta \sum B(t,t_k)} \cdot \frac{B(t,t_J)}{B(t,t_J)} = L_f(t,t_{J-1},t_J)$$

$$B(t,t_J) = B(t,t_{J-1}) \frac{1}{1+\Delta \cdot L_f(t,t_{J-1},t_J)}$$

$$\Rightarrow L_f(t,t_{J-1},t_J) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{B(t,t_{J-1})}{B(t,t_J)} - 1\right)$$

$$= \sum_{J=1}^{n} \underbrace{\frac{B(t,t_J)}{\sum B(t,t_k)}}_{w_J} L_f(t,t_{J-1},t_J)$$

Par Rate

▷ Riesce (ponendo $t_0 = t$)

⋆

$$\begin{aligned} c(t,n) &= \frac{1 - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} \frac{B(t,t_{j-1}) - B(t,t_j)}{\Delta B(t,t_j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} L_f(t,t_{j-1},t_j). \end{aligned}$$

⋆ Quindi il par rate è una media pesata dei tassi a termine semplici; è allora

$$\min_i L_f(t,t_{i-1},t_i) \leq c(t,n) \leq \max_i L_f(t,t_{i-1},t_i).$$

Par Rate

▷ Dall'espressione dei par rate come media pesata, si ottiene inoltre che il par rate è une media pesata del par rate precedente e del tasso semplice e a termine corrente

$$c(t,n+1) = \alpha c(t,n) + (1-\alpha) L_f(t,t_n,t_{n+1}), \quad \alpha = \frac{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)}{\sum_{h=1}^{n+1} B(t,t_h)},$$

▷ quindi se la struttura per scadenza dei par rates è crescente (decrescente) allora sono dominati dai (dominano i) tassi a termine corrispondenti.

. . . Yield to Maturity

▷ È comune ragionare in termini di prezzo di un titolo come funzione (decrescente) dell'YTM:

$I_h \geq 0$

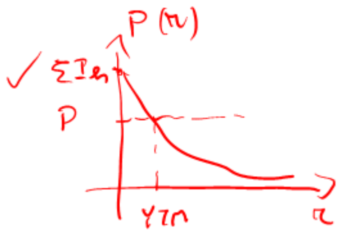
$$P \equiv P(r) = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t_h - t)}.$$

▷ Come si comporta P al variare di r?

⋆

$$P'(r) = -\sum_{h=1}^{n} I_h(t_h - t)\mathrm{e}^{-r(t_h - t)} < 0$$

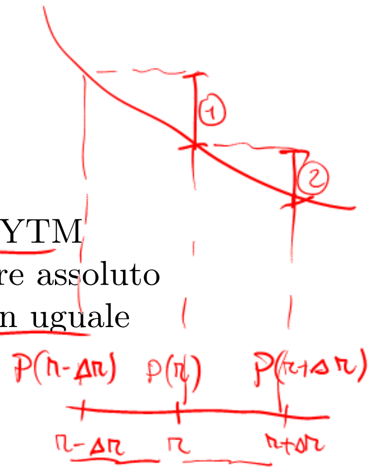
$$P''(r) = \sum_{h=1}^{n} I_h(t_h - t)^2 \mathrm{e}^{-r(t_h - t)} > 0$$



⋆ Quindi P è funzione **decrescente convessa** dell'YTM. Al crescere del YTM il prezzo decresce con tassi marginali decrescenti

⋆ Essendo P continua e $\lim_{r\to\infty} P(r) = 0$ e $P(0) = \sum_h I_h$ si deduce che l'YTM esiste unico se $0 < P < \sum_h I_h$.

. . . Yield to Maturity



▷ ⋆ La convessità implica che una variazione positiva dell'YTM comporta una variazione (negativa) del prezzo in valore assoluto minore della variazione (positiva) corrispondente ad un uguale variazione di segno negativo dell'YTM:

$$P(r) - P(r + \Delta r) < P(r - \Delta r) - P(r).$$

⋆ Dividendo per $P(r)$, lo stesso risultato si applica alle variazioni percentuali (variazioni/prezzo):

$$\frac{P(r) - P(r + \Delta r)}{P(r)} < \frac{P(r - \Delta r) - P(r)}{P(r)}.$$

DURATION (MACAULAY, 1938)

- Per calcolare approssimativamente l'entità delle variazioni assolute e percentuali del prezzo si introducono le seguenti quantità: la DOLLAR DURATION, $\$D$ e la DURATION D, definite da

$$\$D = -P'(r), \quad D = \boxed{-\frac{P'(r)}{P(r)}} = -(\log P(r))'$$

- La prima **approssima** la variazione di P, la seconda la sua variazione percentuale, quando il YTM varia di una quantità 'piccola' Δr:

$+ o(\Delta r)$

ASSOLUTA

$$\boxed{\Delta P(r)} = P(r+\Delta r) - P(r) \cong P'(r)\Delta r = \boxed{-\$D\,\Delta r},$$

$$\boxed{\frac{\Delta P(r)}{P(r)}} = \frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{P(r)} \cong \frac{P'(r)\Delta r}{P(r)} = \boxed{-D\,\Delta r}$$

... DURATION

- La Duration può essere interpretata come media temporale:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{P'(r)}{P(r)} \\ &= \frac{\sum_{h=1}^{n} I_h (t_h - t) e^{-r(t_h - t)}}{P(r)} \\ &= \sum_{h=1}^{n} w_h (t_h - t), \end{aligned}$$

$= w_h$ $\quad \sum w_h = 1$

con $w_h = I_h e^{-r(t_h - t)} / P(r)$.

- Si tratta quindi della media delle vite a scadenza dei flussi pesate con i flussi scontati usando l'YTM.
- Riesce quindi

$$t_1 - t \leq D \leq t_n - t,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se c'è una sola scadenza. Quindi per un TCN la duration coincide con la vita a scadenza.

Convexity

- L'approssimazione 'del primo ordine' che si ottiene con la duration può essere migliorata considerando un termine di 'secondo ordine';
  - ⋆ questo corrisponde ad approssimare con un polinomio di secondo grado (parabola) piuttosto che di primo grado (retta).
  - ⋆ Si ha allora

$$= P'(r)\Delta r + \frac{1}{2}P''(r)(\Delta r)^2 + \cancel{o((\Delta r^2))}$$

$$\Delta P(r) \cong -\$D\,\Delta r + \frac{1}{2}\$Conv\,(\Delta r)^2,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \cong -D\,\Delta r + \frac{1}{2}Conv\,(\Delta r)^2.$$

  - ⋆ $Conv = P''(r)/P(r)$ è la Convexity e $\$Conv = P''(r)$ è la Dollar Convexity.
- La convexity è il momento secondo (ponderato) delle vite a scadenza:

$$Conv = \sum_{h=1}^{n} w_h (t_h - t)^2.$$

... Duration

- Se ragioniamo in termini di tasso i piuttosto che di intensità r, essendo il legame $r = \log(1+i)$, possiamo introdurre la funzione

$$\overline{P}(i) = P(\log(1+i)) = \sum_{h=1}^{n} I_h (1+i)^{-(t_h - t)}. \quad ✓$$

- Riesce allora $\overline{P}'(i) = (P(\log(1+i)))' = \frac{P'(\log(1+i))}{1+i} = -\frac{\$D}{1+i}$
  - ⋆

$$\overline{P}'(i) = \frac{P'(\log(1+i))}{1+i} = -\frac{\$D}{1+i}, \quad \frac{\overline{P}'(i)}{\overline{P}(i)} = -\frac{D}{1+i} = -\,\mathrm{MD},$$

  - ⋆ dove $\mathrm{MD} = \frac{D}{1+i}$ è la Duration modificata.
  - ⋆ Al fine di approssimare una variazione percentuale piccola Δi nel tasso, si utilizza

$$\frac{\Delta\overline{P}(i)}{\overline{P}(i)} \cong -\,\mathrm{MD}\cdot\Delta i + \frac{1}{2}\frac{Conv + D}{(1+i)^2}(\Delta i)^2$$

- Al secondo ordine: $\overline{P}''(i)/\overline{P}(i) = (Conv + D)/(1+i)^2$.

. . . Duration

▷ Esempio: coupon bond, cedole semestrali, scadenza 5 anni, cedole 2.5%, $P = 87.23$, YTM r=8% (i=8.33%, i_2=4.08%), duration e convexity $D = 4.44$, $Conv = 21.23$.

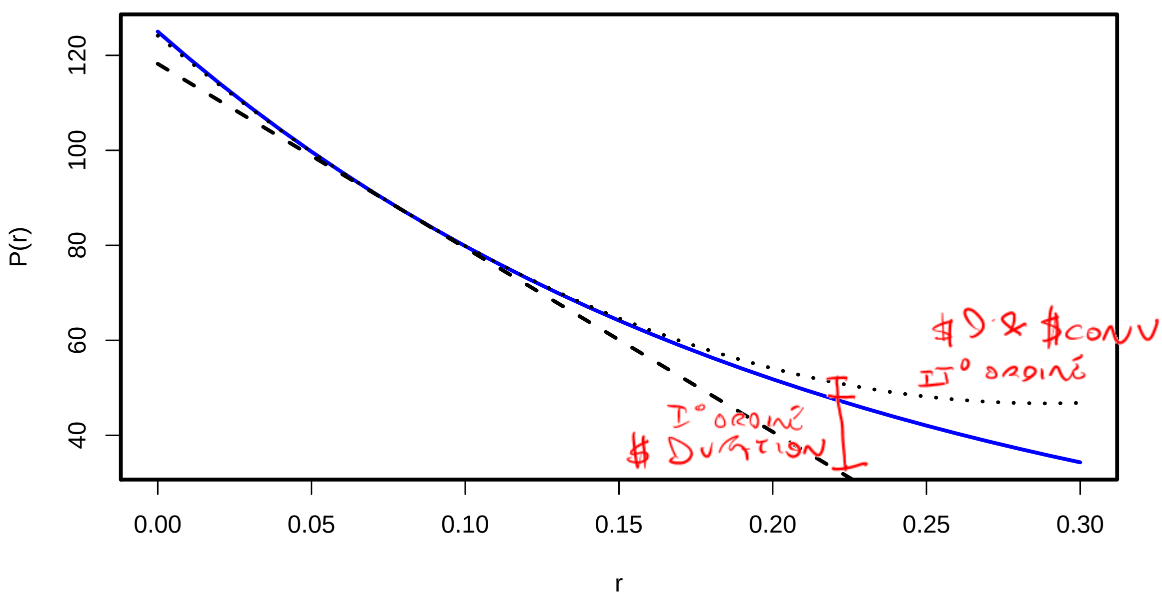
ANNI ANNI 2 2.5%

100BP. = = 1%

ESATTO I° ORDINE II° ORDINE

Δr (b.p.)	ΔP	$\$D$	$\$D\,\&\,\$Conv$	$\Delta P/P$ (%)	D	$D\,\&\,Conv$
−400 =-4%	17.08	15.49	16.98	19.58 %	17.76	19.46
−300	12.50	11.62	12.45	14.33	13.32	14.28
−200	8.13	7.75	8.12	9.32	8.88	9.31
−100	3.97	3.87	3.97	4.55	4.44	4.55
−80	3.16	3.10	3.16	3.62	3.55	3.62
−60	2.36	2.32	2.36	2.70	2.66	2.70
−40	1.56	1.55	1.56	1.79	1.78	1.79
−20	0.78	0.77	0.78	0.89	0.89	0.89
20	−0.77	−0.77	−0.77	−0.88	−0.89	−0.88
40	−1.53	−1.55	−1.53	−1.76	−1.78	−1.76
60	−2.29	−2.32	−2.29	−2.63	−2.66	−2.63
80	−3.04	−3.10	−3.04	−3.49	−3.55	−3.48
100	−3.78	−3.87	−3.78	−4.34	−4.44	−4.33
200	−7.39	−7.75	−7.38	−8.47	−8.88	−8.46
300	−10.83	−11.62	−10.79	−12.41	−13.32	−12.37
400 +4%	−14.11	−15.49	−14.01	−16.17	−17.76	−16.07

. . . Duration



STATICA COMPARATA

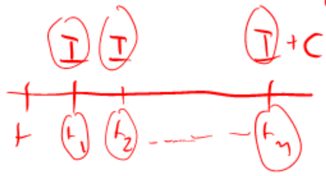
Duration di un Coupon Bond

- Nel caso specifico di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \ldots, n-1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h$ per $h = 1, \ldots, n$ (senza perdita di generalità abbiamo preso $\Delta = 1$, cioè cedole annuali).

$$W_q = I_q e^{-r(t_q - t)} = \begin{cases} I e^{-r(t_q - t)} & q = 1 \ldots n-1 \\ (I+C) e^{-r(t_n - t)} \end{cases}$$

- La duration è funzione decrescente del tasso cedolare I/C: al crescere della cedola diminuisce il peso del rimborso a scadenza

$$\frac{\partial D}{\partial (I/C)} < 0.$$



- La duration è funzione decrescente del tasso di rendimento

$$\frac{\partial D}{\partial r} < 0,$$

MOMENTO 2° > (MOMENTO 1°)^2

un incremento del tasso di rendimento penalizza più le scadenze più lontane

. . . Duration di un Coupon Bond

DURATION CON
" n CEDOLE
D_n ↑ CON n

- All'aumentare del numero di cedole, il comportamento della duration non è sempre monotono: è crescente se $i \leq \frac{I}{C}$ (bond quota alla pari o sopra la pari), mentre è prima crescente poi decrescente se $i > \frac{I}{C}$ (bond quota sotto la pari).
- Indicata con D_n la duration per il titolo con n cedole, e P_n il prezzo corrispondente, è

$$P_{n+1} = P_n + Iv^{n+1} - Cv^n(1-v),$$

$$D_{n+1} = \frac{D_n P_n + I(n+1)v^{n+1} - Cnv^n(1-v) + Cv^{n+1}}{P_{n+1}} \quad \circledast$$

$$D_{n+1} - D_n = \frac{v^n \cdot C}{P_{n+1}}[(n - D_n)(\alpha - 1) + \alpha]$$

con $\alpha = \left(\frac{I}{C} + 1\right) v > 0$. Quindi se $\alpha \geq 1$ (caso $i \leq \frac{I}{C}$) è D_n crescente con n, se $\alpha < 1$ è $D_{n+1} > D_n$ se e solo se $n < D_n + \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial (I/C)} < 0}$$

STATICA COMPARATA RISPETTO TASSO CEDOLARE $\frac{I}{C}$

$$D = \frac{I \sum_h v^h h + C n v^n}{I \sum_h v^h + C v^n} = \frac{\frac{I}{C} \sum h v^h + n v^n}{\frac{I}{C} \sum v^h + v^n}$$

$$\frac{\partial D}{\partial (I/C)} = \frac{1}{(\ldots)^2} \left\{ \sum h v^h \left(\frac{I}{C} \sum v^h + v^n \right) - \sum v^h \left(\frac{I}{C} \sum h v^h + n v^n \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{(\ldots)^2} \left\{ v^n \sum h v^h - n v^n \sum v^h \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(\ldots)}}_{>0} \sum_{h=1}^{n} \underbrace{v^{h+n}}_{>0} \Big(\underbrace{h-n}_{\substack{\leq 0 \\ \text{AND } <0 \\ \text{FOR } h<n}} \Big) < 0$$

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial r} < 0}$$

STATICA COMPARATA RISPETTO AL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO r

$$\frac{\partial D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{p'(r)}{p(r)} \right) = - \frac{p'' p - (p')^2}{p^2}$$

$$= \left(\frac{p'}{p} \right)^2 - \frac{p''}{p} = \underbrace{D^2}_{\text{MOMENTO}^2 \text{ PRIMO}} - \underbrace{\text{Conv}}_{\text{MOMENTO SECONDO}} < 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial n} = ?$$

STATICA COMPARATA RISPETTO AL NUMERO DI CEDOLE n

USANDO (*) (SLIDE 94)

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{P_{n+1}} \Big\{ \cancel{D_n P_n} + I(n+1) v^{n+1} - C\, n v^n (1-v) + C v^{n+1} - D_n \underbrace{P_{n+1}}_{\cancel{P_n} + I v^{n+1} - C v^n (1-v)} \Big\}$$

$$= \frac{v^n \cdot C}{P_{n+1}} \Big\{ \frac{I}{C}(n+1) v - n(1-v) + v - D_n \frac{I}{C} v + D_n (1-v) \Big\}$$

$$= \frac{v^n \cdot C}{P_{n+1}} \Big\{ D_n \underbrace{\Big(1 - v - \frac{I}{C} v\Big)}_{1-\alpha} - n \underbrace{\Big(1 - v - \frac{I}{C} v\Big)}_{1-\alpha} + \underbrace{\frac{I}{C} v + v}_{\alpha} \Big\}$$

$$= \frac{v^n C}{P_{n+1}} \Big\{ \underbrace{(n - D_n)}_{\geq 0} (\alpha - 1) + \alpha \Big\}$$

$(> 0$ SE $n > 1)$

SE $\alpha \geq 1 \Rightarrow D_{n+1} - D_n > 0 \Leftrightarrow$ DURATION CRESCE CON IL N. DI CEDOLE

$\Updownarrow$

$$v\Big(\frac{I}{C} + 1\Big) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{I}{C} \geq i$$

SE $\alpha < 1$ $\Big(\Leftrightarrow \frac{I}{C} < i\Big)$ $\Rightarrow D_{n+1} - D_n > 0$

$\Updownarrow$

$$D_n > \underbrace{n - \frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\text{PUNTO DI MAX DELLA DURATION}}$$

. . . Duration di un Coupon Bond

▷ In ogni caso D_n converge verso un valore limite; sfruttando le

$$\sum_{h=1}^{n} v^h = v\frac{1-v^n}{1-v}, \quad \sum_{h=1}^{n} hv^h = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^n}{1-v} - nv^n\right),$$

$v + 2v^2 + 3v^3 + \dots + nv^n$

si ottiene

$$D_n = \frac{nv^n\left(1 - \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\right) + \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\frac{1-v^n}{1-v}}{\frac{I}{C}\frac{v}{1-v}(1-v^n) + v^n}$$

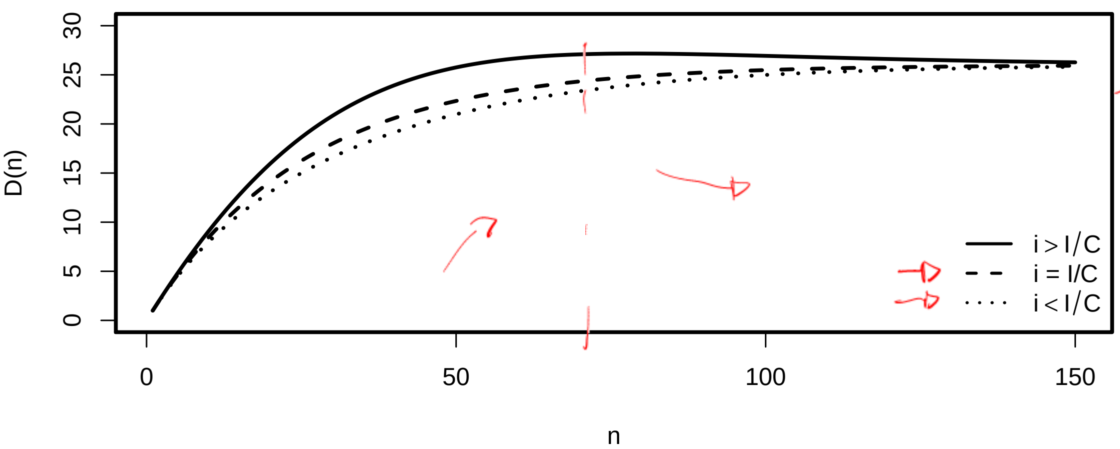
$n \cdot v^n \to 0$
$n \to \infty$
(se $v<1$)

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = \frac{1+i}{i},$$

che è la duration di una rendita perpetua.

. . . Duration di un Coupon Bond



$\frac{i}{1+i}$

Figura: $C = 100$, $i = 4\%$, $I = 2,\ 4,\ 6$.