1 PI. EFFECTIVE ACTION

ES. 1 campo ϕ)

$$Z(J) = e^{-W(J)/\hbar} = \int d^n\phi \, e^{-(S[\phi] + J\phi)/\hbar}$$

Def. $\psi = \dfrac{\partial W}{\partial J} = -\dfrac{\hbar}{Z(J)} \dfrac{\partial}{\partial J}\left(\int d\phi \, e^{-(S+J\phi)/\hbar}\right)$

$$\psi = \frac{1}{Z(J)} \int d\phi \; \phi \; e^{-(S+J\phi)/\hbar} = \langle \phi \rangle_J$$

correlatore che uno calcolerebbe nella teoria con $S_J = S + J\phi$

ψ è chiamato "campo medio"

(valore di aspettaz. del camp ϕ (op.)

$\rightarrow$ include tutte le correzioni quantistiche)

Definiamo l' "Azione efficace quantistica"

$$\Gamma(\psi) = W(J) - J\psi \qquad \text{(Legendre transform)}$$

funzione di ψ

sostituire $J(\psi)$ ottenuta dall'invers. di $\psi = \dfrac{\partial W(J)}{\partial J}$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} = \cancel{\underbrace{\frac{\partial W}{\partial J}}_{=\psi}\frac{\partial J}{\partial \psi}} - \cancel{\frac{\partial J}{\partial \psi}\psi} - J = -J$$

- $\psi = \dfrac{\partial W}{\partial J}$
- $J = -\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \psi}$

Inoltre, notiamo che

$$\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi}\right|_{J=0} = 0 \;!$$

$\psi|_{J=0} = \langle \phi \rangle$ devono soddisfare questa equaz.

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ pt. estrem. di Γ danno i possibili valori di aspettaz. di ϕ.

Consideriamo una teoria quantistica definita da

$$e^{-W_\Gamma(J)/g} = \int d\psi \; e^{-(\Gamma(\psi) + J\psi)/g}$$

$\downarrow$

può essere calcolata sommando diagrammi di Feynman connessi, costruiti usando PROPAGATORI & VERTICI dati dall'azione $\Gamma(\psi)$

$$\rightsquigarrow \quad W_\Gamma(J) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} g^\ell W_\Gamma^{(\ell)}(J) \qquad \text{(loop expansion)}$$

$W_\Gamma^{(0)}(J)$: – diagrammi albero costruiti con prop. & vert. di Γ

– può essere estratto prendendo il limite $g \to 0$

$\Downarrow$

$W_\Gamma(J)$ dominato da φ t.c. $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} = -J$

$\Rightarrow$ at leading order

$$W_\Gamma(J) = W_\Gamma^{(0)}(J) = \underbrace{\Gamma(\varphi) + J\varphi}_{= W(J)} \Big|_{\varphi_{min}}$$

risolve

$$\Rightarrow \quad W_\Gamma^{(0)}(J) = W(J)$$

somma dei diagrammi tree-level rispetto all'azione Γ

somma dei diagrammi connessi rispetto all'azione S

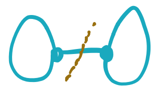
$\downarrow$

ognuno di questi può essere visto come un albero di diagrammi 1 P. I. (1 particle irreducible)

vertici sono diagr. 1PI $\rightarrow$

[1PI diagrams: diagramma che non può essere separato in due diagr. tagliando una linea.

Es. $S(\phi)=\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{6}\phi^3$ 

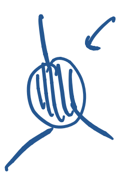
 ~~1PI~~

 1PI]

$\Rightarrow$ Γ è il generatore di diagrammi 1PI rispetto a S.

[Vertice trivalente è derivata di S tre volte rispetto a ϕ

Es. $S(\phi)=\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{6}\phi^3 \rightsquigarrow$  $-\lambda$]

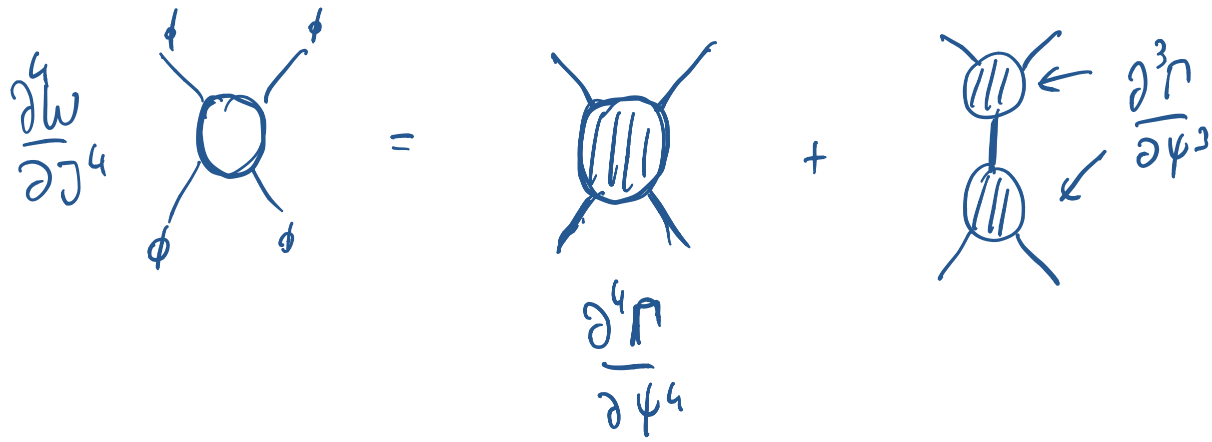
$\frac{\partial^3\Gamma}{\partial\varphi^3} \longleftrightarrow$  ← diagr. Feynman 1PI

$$\langle \phi^a \phi^b \rangle^{\text{conn.}} = -\hbar \frac{\partial^2 W}{\partial J_a \partial J_b} = -\hbar \frac{\partial \varphi^b}{\partial J_a} =$$

$$= -\hbar \left(\frac{\partial J_a}{\partial \varphi^b}\right)^{-1} = \hbar \left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\varphi^a\partial\varphi^b}\right)^{-1}$$

$$\boxed{\text{Propagatore} = \text{inverso della } \frac{\partial^2\Gamma}{\partial\phi^2}}$$

Derivando ulteriormente in J, ottengo le relaz. tra i correlatori connessi e i diagr. 1PI.



$\Rightarrow$ Per calcolare i correlatori in ϕ, "basta" calcolare tutti i diagrammi 1PI

1PI diagr. sono i building blocks.

$\downarrow$

"proper vertices"

FERMIONI & NUMERI DI GRASSMANN

Numeri di Grassmann $\{\theta^a\}$ t.c.

$$\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{(\theta^a)^2 = 0}}$$

$$\theta^a \phi^b = \phi^b \theta^a \qquad \phi^b \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$$

Gr.n. num.

$\theta^a\theta^b$ è un numero commutativo $\longrightarrow (\theta^a\theta^b)\theta^c = \theta^c(\theta^a\theta^b)$

antisimm.

$$F(\theta) = f + f_a\theta^a + \frac{1}{2!} g_{a_1 a_2}\theta^{a_1}\theta^{a_2} + \dots$$

funzione a n variabili

$$+ \dots + \frac{1}{n!} g_{a_1\dots a_n}\theta^{a_1}\cdots\theta^{a_n}$$

Operatore derivata : $\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^a}, \theta^b\right\} = \delta_a{}^b$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^a}, x^b\right] = \delta_a{}^b \qquad x^{a,b} \in \mathbb{R}$$

dim

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^a}, x^b\right] f = \frac{\partial}{\partial x^a}(x^b f) - x^b\frac{\partial}{\partial x^a} f =$$

$$= \delta_a{}^b \cdot f + x^b\frac{\partial f}{\partial x^a} - x^b\frac{\partial f}{\partial x^a} = \delta_a{}^b \cdot f$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^a}, \theta^b\right\}\cdot F(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta^a}\left(\underline{\theta^b F(\theta)}\right) + \theta^b\frac{\partial}{\partial\theta^a}F(\theta)$$

$$= \delta_a^{\,b} F(\partial) - \theta^b \cancel{\frac{\partial}{\partial\theta^a}} F(\theta) + \theta^b \cancel{\frac{\partial}{\partial\theta^a}} F(\theta) = \delta_a^{\,b} F(\partial)$$

Integrazione $\int d\theta \, f(\theta)$

$f(\theta)$ è una funz. a <u>una</u> variab. di Grass.

$$f(\theta) = a + b\theta$$

$$\int d\theta\, f(\theta) = a \underline{\underline{\int d\theta}} + b \underline{\underline{\int \theta\, d\theta}}$$

dobbiamo definire come fare questi due integrali e avremo definito l'integrale su ogni funz.

- integrale sia invariante per traslazione

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f(x'+\alpha) \right]$$

$$\int d\theta' (\theta' + \eta) = \int d\theta\, \theta$$

$$= \int d\theta'\, \theta' + \eta \int d\theta'$$

siccome θ e θ' sono variabili di integrazione $\int d\theta\, \theta = \int d\theta'\, \theta'$

$$\Rightarrow \quad \int d\theta = 0$$

- normalizziamo la misura di integr. t.c.

$$\int d\theta \, \theta = 1$$

In particolare se $f(\theta) = a + b\theta$,

$$\int d\theta \, f(\theta) = a \int d\theta + b \int d\theta \, \theta = b$$

→ Una conseguenza di queste definizioni è

$$\int d\theta \, \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

derivata $\frac{\partial}{\partial \theta}$ ammazza il termine $\propto \theta$

↓

l'integrale di una derivata totale è NULLA

$\Rightarrow$ possiamo INTEGRARE PER PARTI

(ignorando termini di bordo)

Per un numero n generico di variabili di Gr.

$$\int \underbrace{d\theta^n d\theta^{n-1} \cdots d\theta^2 d\theta^1}_{\equiv d^n\theta} \theta^1 \cdots \theta^n = 1$$

$$\int d\theta^n \int d\theta^{n-1} \cdots \int d\theta^2 \underbrace{\Big(\int d\theta^1 \theta^1\Big)}_{=1} \underbrace{\theta^2}_{=1} \cdots \theta^n \cdots = 1$$

In generale

$$\int d^n\theta \; \theta^{a_1} \cdots \theta^{a_n} = \epsilon^{a_1 \cdots a_n}$$

Se ridefiniamo $\theta'^a = N^a{}_b \theta^b$ (combinaz. LINEARE)

$$\int d^n\theta \; \underbrace{\theta'^{a_1} \cdots \theta'^{a_n}}_{\text{funz. dei } \theta} = N^{a_1}{}_{b_1} \cdots N^{a_n}{}_{b_n} \int d^n\theta \; \theta^{b_1} \cdots \theta^{b_n}$$

$$= N^{a_1}{}_{b_1} \cdots N^{a_n}{}_{b_n} \, \epsilon^{b_1 \cdots b_n} =$$

$$= (\det N) \cdot \epsilon^{a_1 \cdots a_n} =$$

$$= (\det N) \cdot \int d^n\theta' \; \theta'^{a_1} \cdots \theta'^{a_n}$$

$$\Rightarrow \quad d^n\theta = (\det N)\, d^n\theta' \qquad N \sim \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}$$

$$\det N \sim \det \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}$$

[Per numeri standard

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'}\, dx' \qquad d^n x = \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right) d^n x'$$

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)}$$

]

$$\int d^{2m}\theta\, e^{-\theta^a A_{ab}\theta^b} \sim \sqrt{\det A}$$