SISTEMA DI N PTI MATERIALI VINCOLATI

$$\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$$

$w_j \quad j = 1, \dots, 3N$

Vincoli:

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, r$$

Gradi di libertà:

$$n = 3N - r$$

Forma parametrica:

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n, t) \qquad j = 1, \dots, 3N \qquad (*)$$

Def. Sistema di N pti materiali costituisce un SISTEMA OLONOMO locale a n gradi di libertà ($n \leq 3N$), se la configurazione $\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ è espressa localmente nella forma parametrica $(*)$, con funzioni w_j che soddisfano

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h}\right) = n \qquad \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_n} \text{ sono lin. indip.}$$

e formano una base per lo spazio tangente T_pQ.

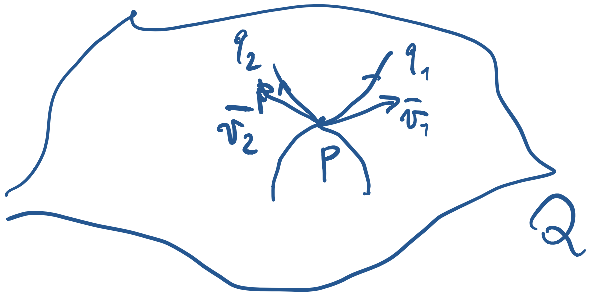
Un generico vett $\delta\bar{w}$ in T_pQ

$$\delta\bar{w} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \delta q_h \qquad \left(\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h \right)$$

"spostam. virtuale" del pto i-esimo

T_pQ = { spazio delle possibile velocità che una traiettoria può avere passando per p }.

$$\bar{v} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cancel{\partial x_h} \, \dot{q}_h$$



$\bar{v} \in T_pQ$ $\quad\quad$ $\bar{v} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \dot{q}_h$

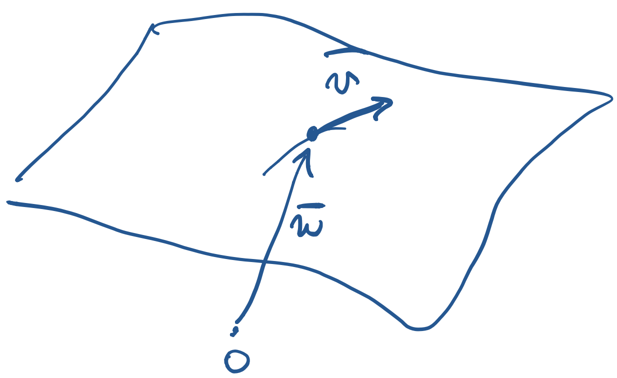
coordinate del vettore $\bar{v}$ in T_pQ rispetto alla base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$

$$\bar{v}_i^* = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h$$

"velocità virtuali"

Se voglio determinare lo "stato" del sistema (vincolato) (cioè le posizioni e le velocità di ogni singolo pto) devo dare le 2n coordinate

$$(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$



$$\bar{v}_i^* = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h$$

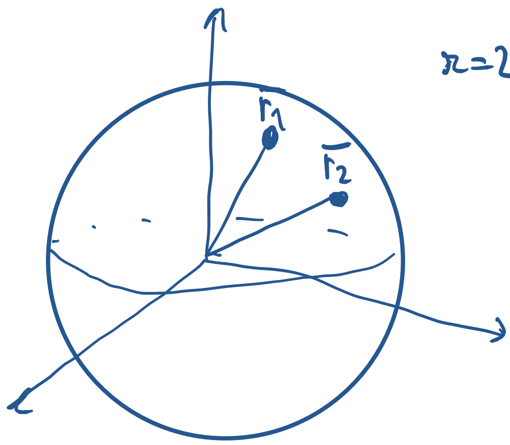
Se ora voglio invece un moto $\bar{w}(t)$, questo sarà descritto dalle FUNZIONI $q_1(t), \dots, q_n(t)$

$$\bar{w}(t) = \bar{w}(q_1(t), \dots, q_n(t), \cancel{t})$$

(adesso è da intendersi come derivata temporale)

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{w}}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \dot{q}_h(t)$$

ES) Due pti $(i = 1,2)$ vincolati a stare su una sfera
$(N=2)$



$r=2$

$f^{(1)}(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$

$f^{(2)}(x_2, y_2, z_2) = 0 \qquad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0$

Forma parametrica (coord. polari)

$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(\theta_1, \varphi_1)$

$\bar{r}_2 = \bar{r}_2(\theta_2, \varphi_2)$

$n = 4$

$n = 3N - r$

$4 = 3 \cdot 2 - 2$

$w_1 = R \operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi_1$

$w_2 = R \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1$

$w_3 = R \cos\theta_1$

$w_4 = R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2$

$w_5 = R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2$

$w_6 = R \cos\theta_2$

$w_j(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$

Vincoli ideali (DINAMICA)

Vincoli sono realizzati da delle FORZE (reazioni vincolari)

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \qquad i = 1, \dots, N$$

Il nostro scopo è ottenere n equazioni (indip. dalle reaz. vincolari) con incognita le n funzioni $q_h(t)$ $h = 1, \dots, n$

Def. Si dice che un sistema olonomo di N pti materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reazioni vincolari $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_N$ è caratterizzato dalla condiz.

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \qquad \forall \delta \bar{r}_i$$

(reaz. vinc. $\bar{\Phi}_i$ devono compiere LAVORO VIRTUALE NULLO $\forall \delta \bar{r}_i$)

Siccome $\delta \bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$, la condiz. diventa

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) = 0$$

per δq_h arbitrari

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h = 1, \dots, n$$

$\longrightarrow n$ EQ. INDIP.

Esempio tipico di vincolo ideale: pti vincolati a una superficie liscia, con reazioni vincolari $\bar{\Phi}_i$ ortogonali alla superf.

$\Rightarrow$ in questo caso $\bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall i$

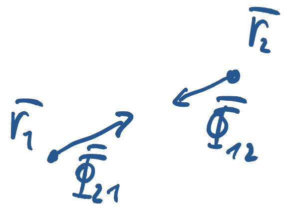
Ma in generale, un vincolo è ideale se avviene la condizione più blando $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0$!

ES.) Vincolo di RIGIDITA' realizzato da forze interne che soddisfano la 3ª legge di Newton.

Prendiamo $N = 2$: $\|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^2 = cost$ $(*)$

$\bar{\Phi}_{12}$, $\bar{\Phi}_{21}$
t.c.

$\bar{\Phi}_{12} = -\bar{\Phi}_{21} \propto \bar{r}_1 - \bar{r}_2$



$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_m)$

Deriviamo $(*)$ per $\dfrac{\partial}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\left[(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\cdot(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\right] = 0$$

$$2(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) = 0 \qquad (\#)$$

Verifichiamo che il vincolo è IDEALE:

$$\sum_{i=1}^{2} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \bar{\Phi}_{21} \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} + \bar{\Phi}_{12} \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} = \bar{\Phi}_{21} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) \propto$$

$$\propto (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) \underset{(\#)}{=} 0 \qquad //$$

ENERGIA CINETICA

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_m) \qquad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$$

Prendiamo un moto

Parametrizzaz. del sist. vinc. è data dalle funz.

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t)$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v}_i(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}_i(t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t) \cdot \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}(t), t)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\bar{v}_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\, \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad (*)$$

funzione di $\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t$

Prop. Dato sist. olonomo di N pti materiali e n gradi di libertà, e sia l'en. cinetica data da

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\|^2$$

funz. $\tilde{T} : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$

Allora si ha che

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{m} a_{hk}(\bar{q}, t)\, \dot{q}_h \dot{q}_k \qquad a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T_1 = \sum_{h=1}^{m} b_h(\bar{q}, t)\, \dot{q}_h \qquad b_h(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} c(\bar{q}, t) \qquad c(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

dove $a = (a_{hk})$ è una matrice SIMMETRICA e DEF. POSITIVA strettam.

Dim.

$$T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{v}_i(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\|^2 \qquad \bar{v}_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i(\bar{q},t)}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{h,k=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k + 2\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right]$$

$$a_{hk}(\bar{q},t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

- simmetrica $\quad a_{hk} = a_{kh}$
  ↓
  manifesto dell'espressione di a_{hk}
- def. positiva

[Matrice a è strettam. def. pos. se $\forall$ vett. $\bar{u} \neq 0$ ho che $a\bar{u}\cdot\bar{u} > 0$; in componenti

$$\underbrace{a\bar{u}}_{\sum_k a_{hk}u_k}\cdot\bar{u} \;\rightarrow\; \sum_h\left(\sum_k a_{hk}u_k\right)\cdot u_h = \sum_{h,k} a_{hk}u_h u_k > 0 \;]$$

$$\sum_{h,k}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}}_{=a_{hk}} u_h u_k \qquad \bar{p}_i \equiv \sum_h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}u_h$$

$$\| $$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \bar{p}_i\cdot\bar{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{p}_i\|^2 > 0 \qquad //$$

La matrice a è detta **MATRICE CINETICA**

- Siccome a è def. pos. $\rightsquigarrow$ $\det a > 0$
  $\Rightarrow$ a è INVERTIBILE
- Se $\bar{r}_i$ è una funz. delle sole q_h (INDIP. da t) $\forall i$
  allora $T_1 = 0$ e $T_0 = 0$ $\Rightarrow$

$\rightarrow$ T è una FORMA QUADRATICA omogenea (def. pos) nelle $\dot{q}_h$.

Cioè $T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$

ES) Pto materiale in coord. cilindriche

$\underline{\underline{\bar{r}(\bar{q})}}$:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = \zeta$$

$q_1, q_2, q_3 \Updownarrow r, \varphi, \zeta$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \dot{z} = \dot{\zeta}$$

$$T = \frac{1}{2} m \|\bar{v}\|^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$= \frac{1}{2} m \Big(\dot{r}^2 \underline{\cos^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2 \underline{\underline{\sin^2\varphi}} - \cancel{2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi}$$
$$+ \dot{r}^2 \underline{\sin^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2 \underline{\underline{\cos^2\varphi}} + \cancel{2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi}$$
$$+ \dot{\zeta}^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2)$$

ES) pto mat. in coord POLARI (sferiche) $\rightsquigarrow T$?

FORZE GENERALIZZATE

Prop. Sia $\bar{F}_i$ forza su i-esimo pto materiale.

Allora il "lavoro virtuale" dato da $\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i$,

corrispondente agli spostam. virtuali $\delta \bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$,

è espresso in termini di coord. libere come

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \, \delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$h = 1, \dots, n$$

$Q_1, \dots, Q_n$ sono dette "forze generalizzate"

In particolare, per forze $\bar{F}_i$ puramente posizionali conservative in cui $\exists\, V = V(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t)$ t.c. $\bar{F}_i = -\bar{\nabla}_i V$, si ha

$$Q_h(\bar{q}, t) = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n \qquad (\#)$$

$$\text{dove} \quad \tilde{V}(\bar{q}, t) = V\left(\bar{r}_1(\bar{q}, t), \dots, \bar{r}_N(\bar{q}, t), t\right)$$

Dim. (#):

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_h}$$

$$\bar{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_h}$$

//

Domani (mercoledì) lezione di IFT alle 11:15