Integrazione delle funzioni razionali fratte

Avvertenza: è opportuno che lo studente provi a rifare tutti i calcoli presentati nel seguito.

1 Caso generale

Consideriamo l'integrale (indefinito o definito)

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

ove $N(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali.

Supponiamo $\text{grado}(N) \geq \text{grado}(D)$. Per esempio:

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Dividiamo $N(x)$ per $D(x)$, cioè scriviamo

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \text{con}$$
$$Q(x) \text{ polinomio quoziente,}$$
$$R(x) \text{ polinomio resto, } \text{grado}(R) < \text{grado}(D).$$

Allora

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{Q(x)}^{\textit{polimomio!}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\text{e } \text{grado}(R) < \text{grado}(D)!$$

Per esempio

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}\,,$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= x - \ln(|x+1|) + c$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}\,,$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= x - \arctan(x) + c$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\,,$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

D'ora in poi

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

ove $R(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali e

$$\text{grado}(R) < \text{grado}(D)$$

Tre casi:

- $\text{grado}(D) = 1$
- $\text{grado}(D) = 2$
- $\text{grado}(D) > 2$

2 Caso I: $\text{grado}(D) = 1$

Si ha

$$\begin{aligned}
\text{grado}(D) = 1 \quad &\Rightarrow \quad D(x) = ax + b,\; a \neq 0 \\
\text{grado}(R) < \text{grado}(D) \quad &\Rightarrow \quad \text{grado}(R) = 0 \\
&\Rightarrow \quad R(x) = k\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{k}{ax+b}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{a}\ln\left(|ax+b|\right) + c
\end{aligned}$$

Per esempio

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(|2x-1|\right) + c
\end{aligned}$$

3 Caso II: $\text{grado}(D) = 2$

Allora

$$\begin{aligned}
&D(x) = ax^2 + bx + c,\; a \neq 0 \\
&\text{grado}(R) < \text{grado}(D) \quad \Rightarrow \quad \text{grado}(R) \leq 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \Rightarrow \quad R(x) = \alpha x + \beta\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Tre casi:

1. $\Delta > 0$
2. $\Delta = 0$
3. $\Delta < 0$

3.1 **Caso II (1):** grado$(D) = 2$ & $\Delta > 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$x_1,\ x_2 \text{ radici reali distinte di } D(x) = 0$$

Allora, esistono A, $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{x - x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x - x_2}\,\mathrm{d}x \\ &= A\ln(|x - x_1|) + B\ln(|x - x_2|) + c\end{aligned}$$

Per esempio

$$\frac{2}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2}{(x+4)(x+1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+1}\,,$$

e trovo A e B facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned}A(x+1) + B(x+4) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(A+B)x = 0 \\ A + 4B = 2\end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases}A = -B \\ 3B = 2\end{cases}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2 + 5x + 4}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{3}\int \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\ln\left(|x+1|\right) - \frac{2}{3}\ln\left(|x+4|\right) + c\end{aligned}$$

Per esempio

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{A}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x-3}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

e trovo A e B facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned}&A(x-3) + B(x-2) = 3x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(A+B)x = 3x \\ -3A - 2B = 1\end{cases}\end{aligned}$$

Quindi $B = 10$ e $A = -7$ e

$$\begin{aligned}&\int \frac{3x+1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x \\ &= -7\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + 10\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= -7\ln\left(|x-2|\right) + 10\ln\left(|x-3|\right) + c\end{aligned}$$

3.2 Caso II (2): grado$(D) = 2$ & $\Delta = 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$
$$D(x) = 0 \text{ ha due radici reali coincidenti}$$

<u>**Due casi:**</u>

- grado$(R) = 0$
- grado$(R) = 1$

- Se grado$(R) = 0$, allora $R(x) = k$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{k}{a(x - x_1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{a}\int (x - x_1)^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{k}{a}(x - x_1)^{-1} + c\end{aligned}$$

- Se grado$(R) = 1$, allora $R(x) = \alpha x + \beta$, con $\alpha \geq 0$. <u>Due metodi:</u>

1. Scompongo nella somma di due frazioni:

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{A}{x - x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{(x - x_1)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{x + 2}{(x - 2)^2} &= \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x - 2)^2} \\ &\Leftrightarrow A(x - 2) + B = x + 2\end{aligned}$$

Quindi $A = 1$, $B = 4$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x - 2)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{(x - 2)^2} \\ &= \ln(|x - 2|) - 4\frac{1}{x - 2} + c\end{aligned}$$

2. evidenzio al numeratore la derivata del denominatore, con manipolazioni algebriche.
   Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{x + 2}{(x - 2)^2} &= \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 4} \qquad \begin{cases}(x^2 - 4x + 4)' \\ = 2x - 4\end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x + 4 - 4 + 4}{x^2 - 4x + 4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x - 4) + 8}{x^2 - 4x + 4}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{(x - 2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 4) - 4\frac{1}{x - 2} + c = \ln(|x - 2|) - 4\frac{1}{x - 2} + c\end{aligned}$$

3.3 Caso II (3): grado$(D) = 2$ & $\Delta < 0$

Allora D ha due radici complesse coniugate, quindi non si fattorizza nel prodotto di due polinomi reali di grado 1.
Per esempio $D(x) = x^2 + x + 1$.
Calcolo

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Primo passo: evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($(x^2+x+1)' = 2x+1$).

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+1-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Secondo passo: per calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

evidenzio al denominatore la somma di 1 e il quadrato di un binomio (in modo da riportarmi a $\sim (\arctan)'$).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4 Caso III: grado$(D) > 2$

Allora D si fattorizza nel prodotto di

- fattori di primo grado
- fattori irriducibili di secondo grado

Per esempio

$$
\begin{aligned}
&x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\\
&x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)\\
&x^3-2x^2=x^2(x-2)\\
&x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x+1)^2(x^2+1)
\end{aligned}
$$

- Per calcolare

$$\int R(x)/D(x)\,\mathrm{d}x$$

scomponiamo $R(x)/D(x)$ nella somma di frazioni ("fratti semplici") aventi come denominatori i fattori di D. Per la ricerca dei numeratori, si tiene conto della molteplicità dei fattori in cui è scomposto D.
Per esempio

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

facendo denominatore comune, trovo

$$
\begin{aligned}
1&=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C\\
&\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A+C-B=0\\A-C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\C=2B=-2A\\A+2A=1\end{cases}\\
&\Rightarrow\begin{cases}B=-\frac{1}{3}\\C=-\frac{2}{3}\\A=\frac{1}{3}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\int\frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare il secondo, evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($=2x+1$)

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\\
&\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\\
&\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c
\end{aligned}
$$

Per esempio, calcolo

$$I=\int\frac{1}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$$

N.B.: il fattore x ha molteplicità 2.
Cerco A, B, C, $D\in\mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Facendo denominatore comune, trovo

$$
\begin{aligned}
1=&\ Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2\\
1=&\ Ax^3+3Ax+Bx^2+3B+Cx^3+Dx^2\\
&\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\B+D=0\\3A=0\\3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\frac{1}{3}\\A=0\\D=-\frac{1}{3}\\C=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Calcolo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c\end{aligned}$$