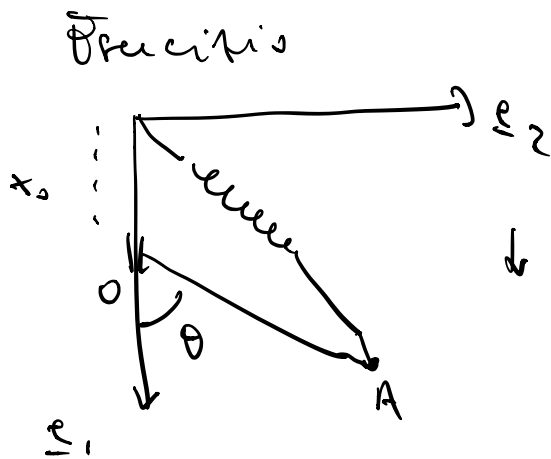


MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 31 MARZO 2020

- PRIMA PARTE



oA

2 coordinate libere

$$\begin{aligned} V &= -m g \cdot \underline{x}_C + \frac{c}{2} \|\underline{x}_B\|^2 \\ &= -m g \frac{L}{2} \cos \theta - m g x_0 \\ &\quad + \frac{c}{2} (x_0^2 + 2Lx_0 \cos \theta) + \frac{c}{2} L^2 \end{aligned}$$

Configurazioni di equilibrio & stabilità

$$V = V(x_0, \theta)$$

• configurazioni di equilibrio

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

simultaneamente

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_0} = -m g + c x_0 + c L \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = \left(\frac{m g}{2} - c x_0 \right) L \sin \theta = 0 \end{cases}$$

particolarmente dello scarto

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = 0 \\ \left(\frac{\omega g}{2} - c x_0 \right) = 0 \end{array} \right.$$

• se $\sin \theta = 0$: $\theta = 0 \rightarrow x_0 = \frac{\omega g}{c} - L$
 $\theta = \pi \rightarrow x_0 = \frac{\omega g}{c} + L$

• se $x_0 = \frac{\omega g}{2c} \rightarrow \cos \theta = \frac{\omega g}{2cL}$ vero solo se $\frac{\omega g}{2cL} \leq 1$

$\frac{\omega g}{2cL} > 1 \rightarrow 2 \text{ conf. } q_1, q_2$

$\frac{\omega g}{2cL} < 1 \rightarrow 4 \text{ conf. } q_1, q_2, q_3, q_4$

Stabilità di queste config. $\Rightarrow$ studiando la matrice Hesseiana

matrice simmetrica

$$Hess V = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & -cL \sin \theta \\ -cL \sin \theta & \left(\frac{\omega g}{c} - c x_0 \right) L \cos \theta \end{pmatrix}$$

def positive $\rightarrow$ minimo locale

def neg $\rightarrow$ max locale

indef $\rightarrow$ punto sella

def pos $\rightarrow$ 2 autovalori > 0

def neg $\rightarrow$ 2 autovalori < 0

indef $\rightarrow$ 1 aut > 0 , 1 aut < 0

Se la matrice è definita $\Rightarrow \det M > 0$

(criterio di Sylvester)

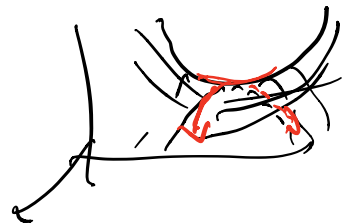
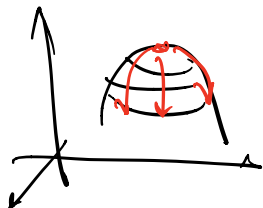
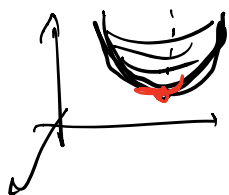
$M_{11} > 0$, $\det M > 0 \Rightarrow$ definita +

$M_{11} < 0$, $\det M > 0 \Rightarrow$ def. -

$$\det \text{ Hess } V = e \left(\frac{mg}{2} - c\theta \right) L \cos \theta - c^2 L^2 \sin^2 \theta$$

calcolati i: q_1, q_2, q_3, q_4

(minori principali $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$)



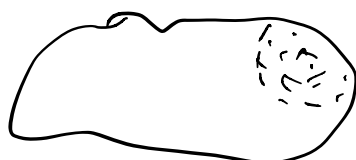
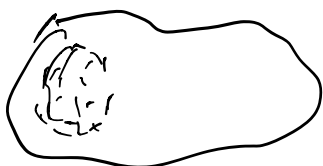
TRASFORMAZIONE DI INERZIA

- corpo rigido $\rightarrow$ ~~consolidate~~ ~~litte~~
sistemi materiali costituiti da
corpi rigidi articolati tra di loro
 $\rightarrow$ problemi della statica: equilibrio

- PLV

- ECS

- Struttura interna di corpo rigido



Consideriamo un sistema S di punti
materiali P_i , m_i

Momento di inerzia rispetto ad una retta

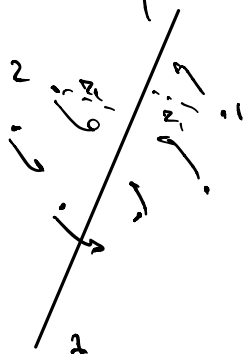
$\rightarrow$ misura l'inerzia di un corpo al
varicare della velocità angolare

• $\rightarrow$



Momento di inerzia rispetto ad una retta

→ somma delle masse $\times$ distanza al quadrato dei punti della retta.



$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2$$

$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} I_z^{(1)} \omega^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} I_z^{(2)} \omega^2$$

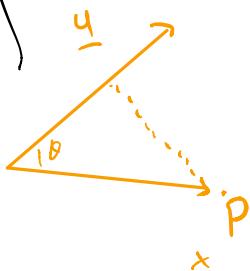
$$I_z^{(1)} < I_z^{(2)}$$

Corpo rigido : formulazione discreta

→ m_P $P \in R$ R corpo rigido



$O \in R$



$\underline{u}$ verso retta z

$$I_z = \sum_{P \in R} m_P \left(\text{distanza } P \text{ da } z \right)^2$$

distanza di P da z

$$\| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \|^2$$

$$(\underline{a} \wedge \underline{b})^2 = \hat{u} \cdot \underline{a} \underline{b} \hat{u} \sin^2 \theta$$

$$I_1 = \sum_{p \in R} m_p \| \underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \|^2$$

→ è una costante che dipende dalle geometrie del rigido e dalle distribuzioni di masse. $(\sum_p \rightarrow \int)$

Dalla definizione

$$I_2 = \sum_{p \in R} m_p \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right] \cdot \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right]$$

usiamo $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}$

$$= \sum_{p \in R} m_p \left[\underline{u} \cdot (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right] \right]$$

$$= \underline{u} \cdot \sum_{p \in R} m_p (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right]$$

Definiamo $I_2 = \underline{u} \cdot I_0(\underline{u})$ $\underline{u} = \text{vers } z$

Abbiamo definito la trasformazione di inerzia (relative al punto 0)

$$I_0(\underline{u}) = \sum_{p \in R} \left[m_p (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right] \right]$$

$I_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (Tensore di inerzia)

I_0 dipende dalla distribuzione di
massa del corpo

dato $\underline{u} \rightarrow I_z = \underline{u} \cdot I_0(\underline{u})$

MECCANICA RAZIONALE

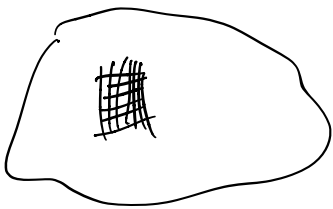
— LEZIONE DEL 31 MARZO 2020

— SECONDA PARTE

Trasformazione di inertia :

$$I_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\underline{y} \rightarrow I_0(\underline{y}) = \sum_{p \in R} \underbrace{w_p(\underline{x}_p - \underline{x}_0)}_{\substack{\uparrow \\ \int \rho(\underline{x}) \, d\tau}} \wedge \left[\underline{y} \wedge \underbrace{(\underline{x}_p - \underline{x}_0)} \right]$$



$\propto w_p$

$$\int \rho(\underline{x}) \, d\tau$$

$$I_z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore } \underline{u}}} \underline{u} \cdot I_0(\underline{u})$$

se sappiamo I_0 , abbiamo $I_z \, \forall \, z$

Prop : la trasformazione di inertia è
lineare e simmetrica

Dim la linearità segue dalla def. :

$$\forall \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \quad I_0(\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}) =$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{P \in R} w_P (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \wedge \left[(\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}) \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \right]$$

$$= \lambda I_0(\underline{y}) + \mu I_0(\underline{z}) \quad \rightarrow \text{lineare}$$

Simmetria : $\underline{y} \cdot I_0(\underline{z}) \stackrel{?}{=} \underline{z} \cdot I_0(\underline{y})$

$$I_0(\underline{y}) = \sum_{P \in R} w_P \underbrace{(\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{\underline{a}} \wedge \left[\underbrace{\underline{y}}_{\underline{b}} \wedge \underbrace{(\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{\underline{c}} \right]$$

$$\left[\text{usiamo } \underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c} \right]$$

$$= \sum_{P \in R} w_P \left[\|\underline{x}_P - \underline{x}_0\|^2 \underline{y} - \left((\underline{x}_P - \underline{x}_0) \cdot \underline{y} \right) (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \right]$$

$$\underline{z} \cdot I_0(\underline{y}) = \sum_{P \in R} w_P \left[\|\underline{x}_P - \underline{x}_0\|^2 (\underline{z} \cdot \underline{y}) + \right.$$

$$\left. - \left((\underline{x}_P - \underline{x}_0) \cdot \underline{y} \right) \underline{z} \cdot (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \right] = \underline{y} \cdot I_0(\underline{z}) \quad \text{QED}$$

I_0 è un operatore lineare e simmetrico

→ fissato un riferimento ortogonale e
solidale al rigido $(O; \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$,

I_0 è rappresentato da una matrice
simmetrica 3×3 , la matrice di
inerzia

$$\text{Se } \underline{y} = y_1 \underline{u}_1 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{u}_3$$

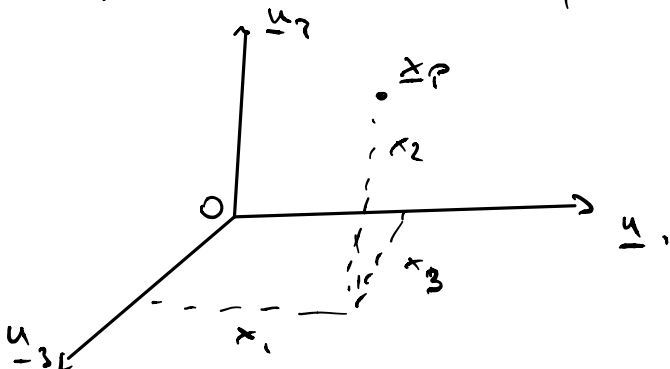
$$I_0(\underline{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vale } I_{jk} = \underline{u}_j \cdot I_0(\underline{u}_k) \quad j, k = 1, 2, 3$$

Dalla definizione

$$I_{jj} = \underline{u}_j \cdot I_0(\underline{u}_j) = I_{\underline{u}_j} \quad \text{momento di inerzia rispetto all'asse } \underline{u}_j$$

Prendiamo $P, x_{p,1}, x_{p,2}, x_{p,3}$



$$\underline{x}_p = x_{p,1} \underline{u}_1 + x_{p,2} \underline{u}_2 + x_{p,3} \underline{u}_3$$

$$I_{\underline{u}_1} = \sum_p m_p \|\underline{u}_1 \wedge \underline{x}_p\|^2$$

$$I_{11} = \sum_p m_p (x_{p,2}^2 + x_{p,3}^2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_{11} &= \sum_p m_p (x_{p,2}^2 + x_{p,3}^2) \\ I_{22} &= \sum_p m_p (x_{p,1}^2 + x_{p,3}^2) \\ I_{33} &= \sum_p m_p (x_{p,1}^2 + x_{p,2}^2) \end{aligned} \right.$$

Prendiamo due vettori ortogonali generici

$$\underline{u}, \underline{v}, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$$

Nello dei di prima

$$\underline{z} \cdot I_0(\underline{y}) = \sum_{p \in R} m_p \left[\|\underline{x}_p - \underline{z}_0\|^2 (\underline{z} \cdot \underline{y}) - (\underline{x}_p - \underline{z}_0) \cdot \underline{y} (\underline{z} \cdot (\underline{x}_p - \underline{z}_0)) \right]$$

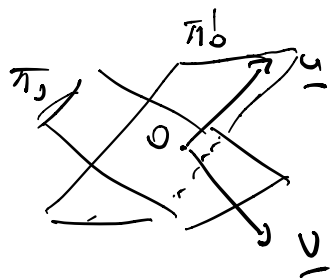
per $\underline{u}, \underline{v}$ tali da $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

$$\underline{u} \cdot I_0(\underline{v}) = - \sum_{p \in R} m_p \left[(\underline{x}_p - \underline{z}_0) \cdot \underline{u} \right] \left[(\underline{x}_p - \underline{z}_0) \cdot \underline{v} \right]$$

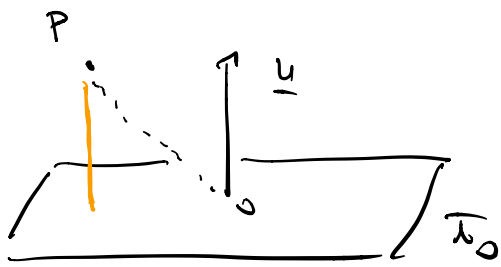
↳ momento deviatore rispetto alla coppia di piani π_0, π'_0 , dove

π_0 : piano per O e ortogonale a $\underline{u}$

π'_0 : piano per O e ortogonale a $\underline{v}$

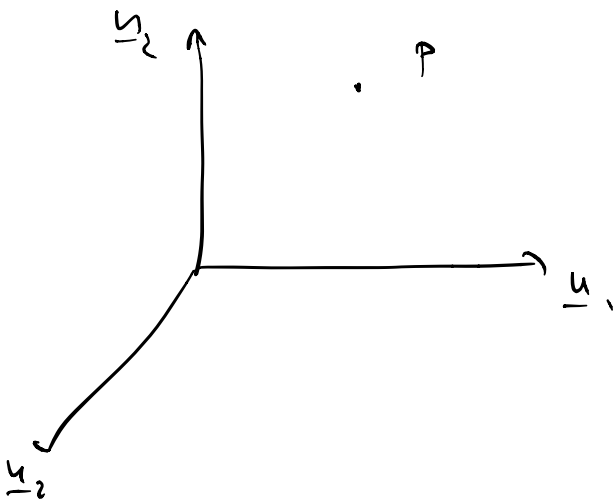


↳ responsabili dei fenomeni di deviazione dell'axe di rotazione (vedremo il seguito...)



$\underline{u} \cdot (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$ è la
distanza (con il segno)
di P da $\underline{x}_0$

(proiezione di $\underline{PO}$ su $\underline{u}$)



$(x_{p,1}, x_{p,2}, x_{p,3})$ $\downarrow \underline{u}_1$ $\downarrow \underline{u}_2$

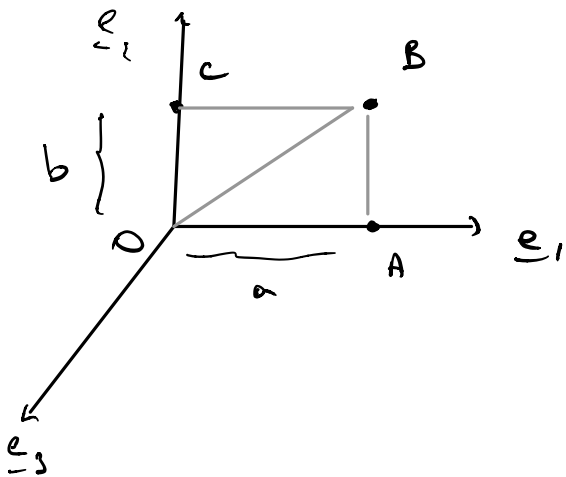
$$I_{12} = - \sum_P w_p x_{p,1} x_{p,2}$$

$\uparrow$
 $\underline{u}_1 \cdot I_0(\underline{u}_2)$

$$I_{23} = - \sum_P w_p x_{p,2} x_{p,3}$$

$$I_{13} = - \sum_P w_p x_{p,1} x_{p,3}$$

Esempio



massa delle aste e
trascurabile rispetto alla
massa dei nodi, w_A, w_B, w_C

$$I_{11} = w_A \cdot 0 + w_B b^2 + w_C b^2$$

$$I_{22} = w_A a^2 + w_B a^2 + w_C \cdot 0$$

$$I_{33} = w_A a^2 + w_B (a^2 + b^2) + w_C b^2$$

$$= I_{11} + I_{22}$$

$$I_{12} = - [m_A (0 \cdot a) + m_B (a \cdot b) + m_C (b \cdot 0)]$$

$$= -m_B (a \cdot b)$$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

Teoremi: rigido piano, se $\underline{u}_3$ è ortogonale al piano, ogni punto del rigido ha coordinate $(x_1, x_2, 0)$

$$\begin{cases} I_{33} = I_{11} + I_{22} \\ I_{13} = I_{23} = 0 \end{cases}$$

matrice di inerzia ridotta (o piano)

cioè

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix}$$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 31 MARZO 2020

— TERZA PARTE

Definizione $I_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underline{y} \mapsto I_0(\underline{y})$$

$I_0 \rightarrow$ determinato da una matrice 3×3

simmetrica.

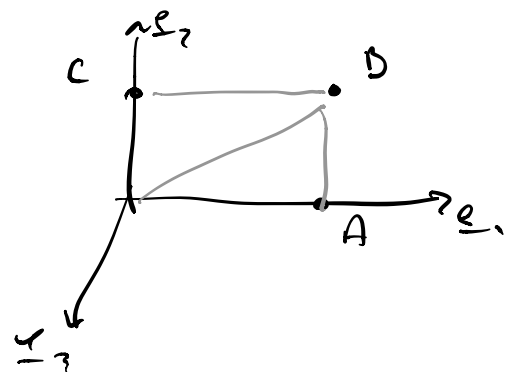
Se sappiamo I_0 per un certo O ,
 possiamo calcolare il momento di inerzia
 per qualsiasi asse z_0 , passante per O ,
 e vettore di z_0 $I_{z_0} = \underline{u} \cdot I_0(\underline{u})$

$$(\dots) \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

oppure, i momenti deviatori rispetto ad una
 coppia di piani passanti per O

$$I_{\pi_0 \pi'_0} = \underline{u} \cdot I_0(\underline{u}) \quad \begin{matrix} \underline{u} & \text{vers} & \text{asse} & \pi_0 \\ \underline{u} & & & \pi'_0 \end{matrix}$$

Esempio



$$Q = (a, a, a)$$

calcoliamo il momento
 di inerzia rispetto a $\overline{OQ}$

Per prima cosa: vettore di

$$\overline{OQ}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{x}_Q - \underline{x}_O}{\|\underline{x}_Q - \underline{x}_O\|} = \frac{(a, a, a)}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$I_{OQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} + I_{12} \\ I_{12} + I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} (I_{11} + 2I_{12} + I_{22} + I_{33})$$

$$= \frac{1}{3} \left(m_c b^2 + m_B b^2 - 2m_D ab + m_A a^2 + m_B a^2 + m_c b^2 + m_A a^2 + m_B (a^2 + b^2) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[b^2 (2m_B + 2m_c) + a^2 (2m_A + 2m_B) - 2m_D ab \right]$$

Commento dalla definizione di I_0

$$\text{Tr}(I_0) = I_{11} + I_{22} + I_{33} =$$

$$= 2 \sum_p m_p (x_{p,1}^2 + x_{p,2}^2 + x_{p,3}^2) =$$

$$= 2 \sum_p m_p \|\underline{x}_p - \underline{x}_0\|^2 = 2 J_0$$

↑ momento polare rispetto ad 0

Ellissoide di inerzia

È una rappresentazione geometrica della
Trasformazione di inerzia.

Prendiamo $O \in \mathbb{R}$ fisso, e c un numero
positivo. Andiamo a considerare il luogo
dei punti P tale che

$$\| \underline{x}_P - \underline{x}_O \|^2 = \frac{c}{I_{2OP}}$$

← momento
di inerzia
rispetto alla
retta passante
per $O \in P$

Per capire meglio questo luogo di punti,
riscriviamo la forma analitica

$$\text{Poniamo } \underline{x} = \underline{x}_P - \underline{x}_O, \quad \underline{u} = \text{vers } \underline{x} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \\ = \text{vers } PO$$

$$\underline{x} \cdot I_O(\underline{x}) = \|\underline{x}\| \underline{u} \cdot I_O(\|\underline{x}\| \underline{u}) =$$

↓ per linearità

$$= \|\underline{x}\|^2 \underline{u} \cdot I_O(\underline{u}) = \|\underline{x}\|^2 I_{2OP}$$

$$= \|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 I_{2OP} = c$$

Quindi abbiamo visto

$$\left\{ P : \|\underline{x}_P - \underline{x}_0\|_{I_{2,0}}^2 = \underline{c} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) := \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = c \right\}$$

Def Chiamiamo $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x})$ la

forma quadratiche associata ad I_0

EsPLICITAMENTE : $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) =$
 $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$= \sum_{i,j=1}^3 x_i I_{ij} x_j =$$

$$= I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + I_{33} x_3^2 + 2 I_{12} x_1 x_2 +$$
$$+ 2 I_{13} x_1 x_3 + 2 I_{23} x_2 x_3$$

Propositione (escludendo este) la forma quadratiche $f(\underline{x})$ è definita positiva :

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) \geq 0 & \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \\ f(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

Dici Abbiamo visto che

$$\underline{x} \cdot \underline{I}_0(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2 I_{\text{top}}$$

dove $I_{\text{top}} > 0$

Proposizione $\forall c > 0$, il luogo geometrico

$f(\underline{x}) = c$ è un ellissoide di centro O

→ ellissoide di inerzia del rigido relativo
ad O

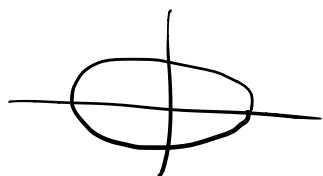
Dici per costruzione: $f(\underline{x}) = c$

è una quadrica (polinomio di 2° grado

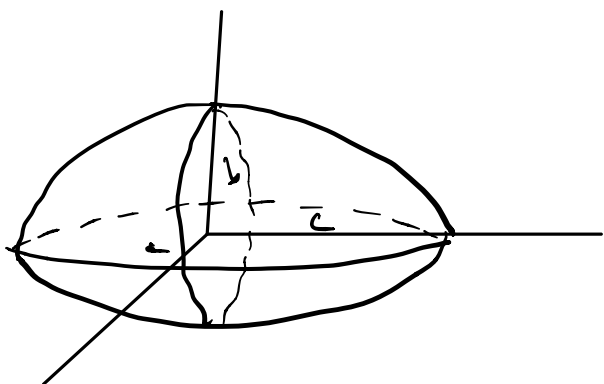
in x_1, x_2, x_3) di centro O , i cui

punti sono a distanza fissa da O .

In 2D



luogo dei punti
a distanza fissa
da O

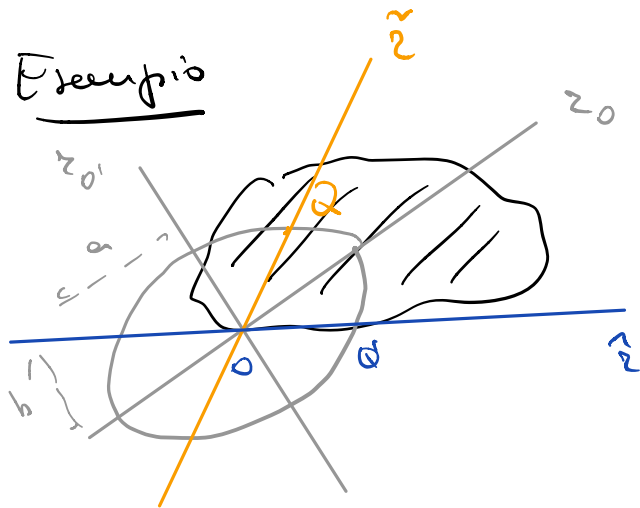


$$\tilde{\underline{I}}_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix}$$

Piano: ellisse di inerzia

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \tilde{\underline{I}}_0(\underline{x}) = I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + 2I_{12} x_1 x_2$$

Esempio



$$f(x) = x \cdot \tilde{I}_0(x) = 1 \quad (\text{power } C=1)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{z_0}}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{I_{z_1}}}$$

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right)$$

$I_{\tilde{z}}$ si può determinare graficamente, del punto Q di intersezione con l'asse $\tilde{z}$

$$I_{\tilde{z}} = \frac{1}{\overline{OQ}^2}$$

Ad esempio $b \leq \overline{OQ} \leq a$

quindi $\frac{1}{a^2} = I_{z_0} \leq I_{\tilde{z}} \leq I_{z_1} = \frac{1}{b^2}$