

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 4 APRILE 2020

— PRIMA PARTE

Trasformazione di inerzia

$$I_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$I_0(\underline{y}) = \sum_{p \in R} m_p (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \wedge \left[\underline{y} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right]$$

distribuzione delle masse *geometria del corpo*

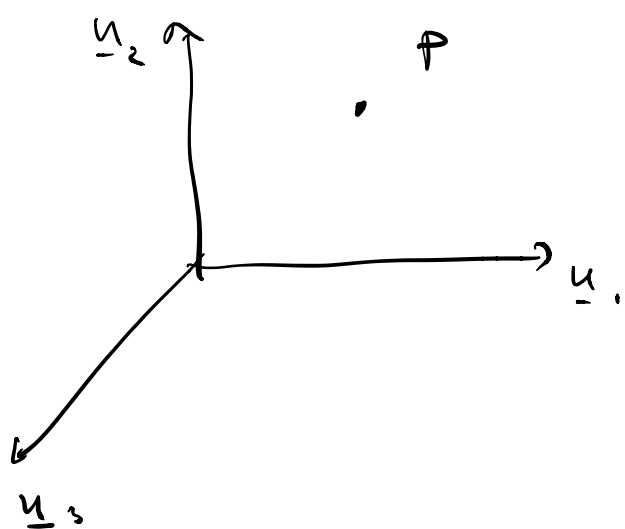
Proprietà : dato $\underline{z}$ di versore $\underline{u}$
il momento di inerzia rispetto ad $\underline{z}$

$$I_z = \underline{u} \cdot I_0(\underline{u})$$

$I_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, lineare e simmetrico

$\Rightarrow$ rappresentato da una matrice

$$I_0(\underline{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$



$$(x_{P,1}, x_{P,2}, x_{P,3})$$

$$I_{11} = \sum_P w_P (x_{P,2}^2 + x_{P,3}^2)$$

$$I_{22} = \sum_P w_P (x_{P,1}^2 + x_{P,3}^2)$$

$$I_{33} = \sum_P w_P (x_{P,1}^2 + x_{P,2}^2)$$

$$I_{12} = - \sum_P w_P x_{P,1} x_{P,2}$$

$$I_{23} = - \sum_P w_P x_{P,2} x_{P,3}$$

$$I_{13} = - \sum_P w_P x_{P,1} x_{P,3}$$

Caso particolare : uguali piani

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{I_{11} + I_{22}}_{I_{33}} \end{pmatrix}$$

u_3
è ortogonale
al piano
del rigido

Ellissoide di inerzia : rappresentazione
geometrica della trasformazione di inerzia

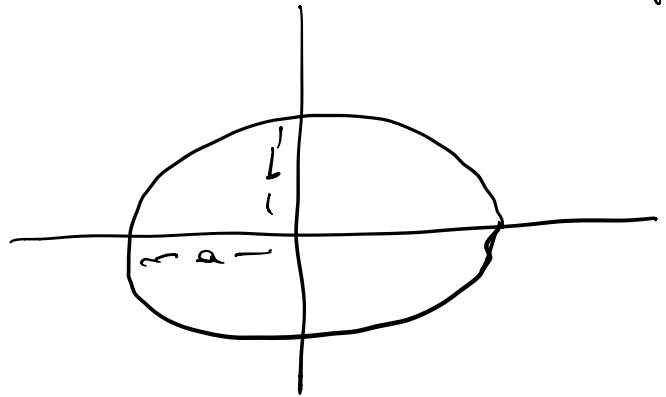
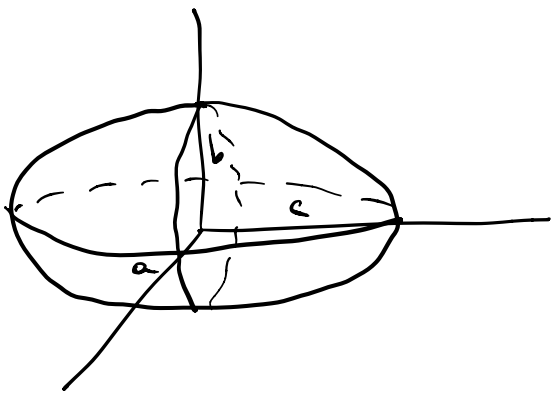
A I_0 possiamo associare una forma

quadratica $f(x) := x \cdot I_0(x)$

$$\{ x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = x \cdot I_0(x) = C \}$$

→ ellissoidi

l'insieme dei punti P : $\|x_P - x_0\|^2 = \frac{c}{I_{\text{top}}}$



Assi principali di inerzia

Un ellissoide può essere scritto in
forma canonica :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

Potremo $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ gli assi di simmetria
dell'ellissoide

$$\underline{x} \cdot \underline{I}_0(\underline{x}) = 1 \quad \Rightarrow \quad J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_3 x_3^2 = 1$$

$\dots$
 $c = 1$

$$\boxed{f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \underline{I}_0(\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^3 x_i I_{ij} x_j}$$

Per questa scelta di assi

$$I_0 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

Quindi :

1. $I_0(\underline{i}) = J_1 \underline{i}$

$$I_0(\underline{j}) = J_2 \underline{j}$$

$$I_0(\underline{k}) = J_3 \underline{k}$$

→ $\forall$ vettore $\underline{u}$ di un'axe di simmetria

$$I_0 \cdot \underline{u} = \lambda \underline{u}$$

$\Rightarrow$ $\underline{u}$ autovettore di I_0
 λ autovalore di I_0

(momento di
inerzia rispetto a $\underline{u}$)

2. Componenti fuori della diagonale
sono $\geq 0 \Rightarrow$ i momenti deviatori
rispetto alla coppia di piani di

simmetria dell'ellissoide di inerzia
si annullano

Definiamo: Asse principali di inerzia
relativi al polo O (A.P.I.)

- assi di simmetria dell'ellissoide
- autovettori di I_O
- assi ortogonali tali che i momenti
deviatori (rispetto alle coppie di piani
ortogonali e questi assi) si annullano

Metodi di calcolo per gli assi
principali di inerzia.

1) Metodo di autovalori & autovettori

Supponiamo di conoscere I_O (in una
forma data) e cerchiamo

$$I_O(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$$



$$I_O \underline{x} - \lambda Id \underline{x} = 0$$

$\uparrow$ matrice ident. Id

$$\Rightarrow (I_0 - \lambda I_d) \underline{x} = 0$$

sistema
lineare
omogeneo

Vogliamo soluzioni $\underline{x} \neq \underline{0} \Rightarrow$ dobbiamo
cercare λ tali che $\det(I_0 - \lambda I_d) = 0$

"equazione caratteristica per gli
autovalori"

(Autovalori $\rightarrow$ momenti di inerzia
principali)

Matrice simmetrica $n \times n$ ha n
autovalori reali

eq. caratteristica $\Rightarrow$ troviamo gli
autovalori

Dagli autovalori $\rightarrow$ troviamo gli autovettori

$$\lambda \rightarrow (I_0 - \lambda I_d) \underline{x} = 0 \quad \text{troviamo } \underline{x}$$

dal vettore $\underline{x}$, ricaviamo l'autovettore
normalizzato $\underline{u} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$

Dall' algebra

- matrice simmetrica reale $n \times n$
→ autovettori corrispondenti ad autov valori diversi sono ortogonali

- -- , esiste almeno una base
ortogonale di n autovettori

⇒ calcolo di autov valori & autovettori
di I_0 : determino A.P.I.

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 9 APRILE 2020

— SECONDA PARTE

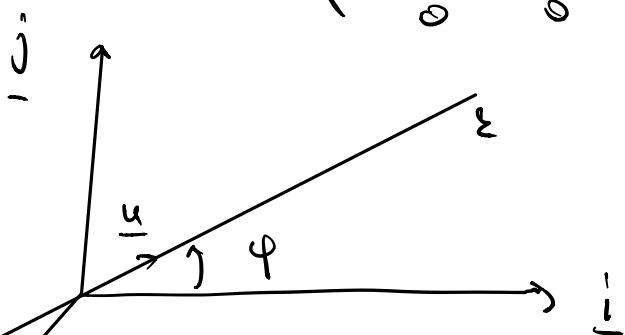
2) Massimi & minimi di I_2 nel
fascio di rette passante per O

Questo metodo è utile & uno degli
assi principali è noto e vogliamo gli

altri due (ad esempio per rigidi piani).

Terna $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, $\underline{k}$ ass. principale di inerzia (pu $\odot$)

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$



$$\underline{u} = \cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}$$

$$I_2(\varphi) = \underline{u} \cdot I_0 \cdot \underline{u}$$

$$= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\cos \varphi \quad \sin \varphi \quad 0) \begin{pmatrix} I_{11} \cos \varphi + I_{12} \sin \varphi \\ I_{12} \cos \varphi + I_{22} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{I_{11} \cos^2 \varphi + I_{22} \sin^2 \varphi + 2 I_{12} \cos \varphi \sin \varphi}$$

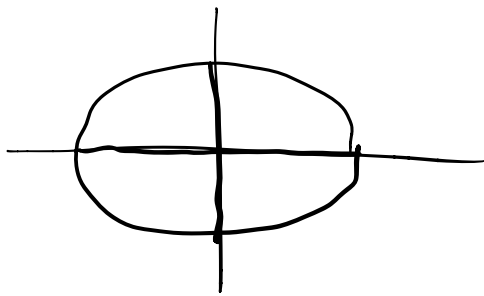
Ellisse di inerzia nel piano: assi di simmetria corrispondono alla retta $\underline{k}$

per cui I_2 è massimo o minimo

φ tra 0 e π

Cerchiamo φ tali

che $\frac{d}{d\varphi} I_2(\varphi) = 0$



$$\frac{d}{d\varphi} I_2(\varphi) = -2 I_{11} \cos\varphi \sin\varphi + 2 I_{22} \sin\varphi \cos\varphi + 2 I_{12} (-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$= (I_{22} - I_{11}) \sin 2\varphi + 2 I_{12} \cos 2\varphi = 0$$

$$\cotan(2\varphi) = \frac{I_{11} - I_{22}}{2 I_{12}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \sim \frac{e^{i\theta} \pm e^{-i\theta}}{2(i)}$$

$\varphi \in [0, \pi]$, otteniamo due valori

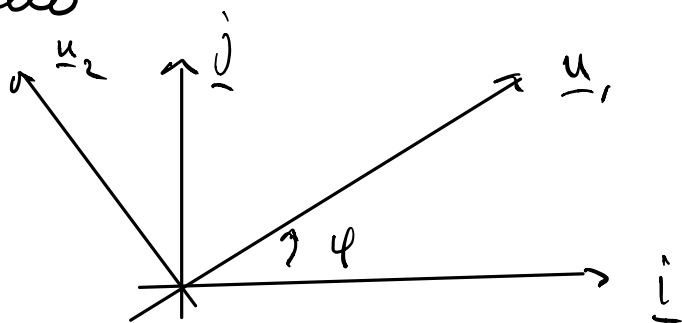
$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} \arccot \left(\frac{I_{11} - I_{12}}{2 I_{12}} \right) \\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

→ sostituiamo $I_2(\varphi)$

3) Annullamento dei momenti deviatori

Nelle stesse condizioni di prima cerchiamo due assi $\underline{u}_1 = \underline{u}_2$ tali che nelle forme $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{k})$ il momento deviatore sia nullo

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$



Cerchiamo φ tale che $\underline{u}_2 \cdot I_0(\underline{u}_1) = 0$

Prendiamo $\underline{u}_1 = \cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}$

$$\underline{u}_2 = -\sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}$$

$$I_0 \cdot \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} I_{11} \cos \varphi + I_{12} \sin \varphi \\ I_{12} \cos \varphi + I_{22} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

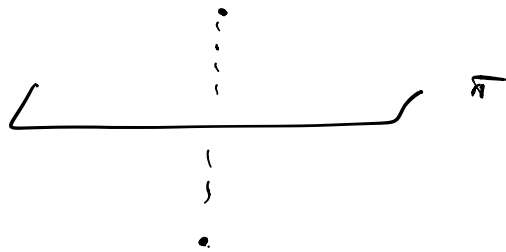
$$\begin{aligned} \underline{u}_2 \cdot I_0 \cdot \underline{u}_1 &= -\sin \varphi (I_{11} \cos \varphi + I_{12} \sin \varphi) \\ &\quad + \cos \varphi (I_{12} \cos \varphi + I_{22} \sin \varphi) \\ &= I_{12} \cos 2\varphi + \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\varphi = 0 \end{aligned}$$

→ lo stesso conditione di prima

4) Piano di simmetria materiale ortogonale

Un piano π si dice di simmetria materiale ortogonale se

- è un piano di simmetria geometrico ortogonale

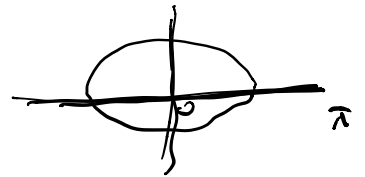


- i punti simmetrici rispetto al piano hanno massa uguale (o densità, se nel continuo)

Proposizione Se π è un piano di simmetria materiale ortogonale per un rigido R $\forall$ punto $O \in \pi$, la retta per O e ortogonale al piano è un'asse principale di inerzia.

Dici : prendiamo due rette ϵ e ϵ' ,

simmetriche rispetto a π e passanti per O
 Per simmetrie (potremmo scambiare le
 due rette) $I_2 = I_2'$. Quindi π è un
 piano di simmetria dell'ellissoide di inertia
 per O (= piano principale di inertia)
 Siccome è un piano di simmetria
 dell'ellissoide, la retta ortogonale
 e passante per O è un'asse di
 simmetria dell'ellissoide.



Quindi:

la retta per O ortogonale al piano π
 è un'asse principale di inertia per O
 cod.

Questo metodo è utile per solidi
 omogenei e geometricamente semplici
 (cubi, parallelepipedi —)

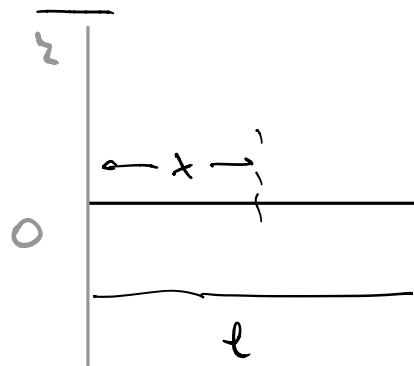
MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 9 APRILE 2020

- TERZA PARTE

Calcolo degli elementi di inerzia per alcune figure

Asse



Calcoliamo il
momento di inerzia
rispetto all'asse e
passante per O

Densità $\rho = \rho(x)$

Per definizione:

$$I_z = \int_0^l \rho(x) x^2 dx$$

Caso particolare

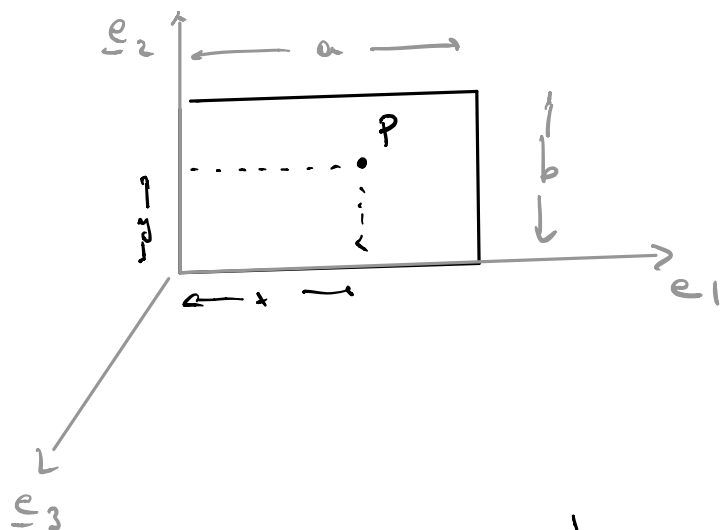
$\rho = \text{costante}$

$\rightarrow$

$$M = \int_0^l \rho(x) dx = \rho l$$

$$I_z = \int_0^l \rho x^2 dx = \rho \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{l^3}{3} = M \frac{l^2}{3}$$

Rettangolo (rispetto al vertice 0)



$$\rho(x, y)$$

$$I_{11} = \int_0^a \int_0^b dx dy \rho(x, y) y^2$$

omogeneo

$$\rho a \frac{b^3}{3} = M \frac{b^2}{3}$$

$$I_{22} = \int_0^a \int_0^b \rho x^2 dx dy$$

omogeneo

$$\rho b \frac{a^3}{3} = M \frac{a^2}{3}$$

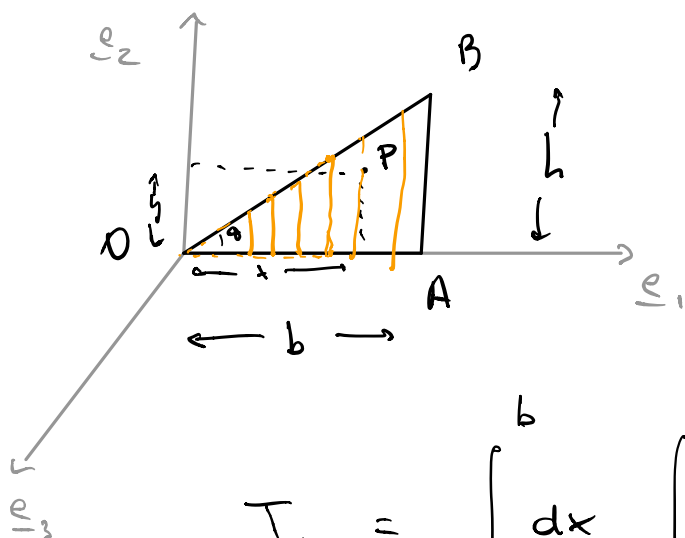
$$I_{33} = I_{11} + I_{22}, \quad I_{13} = I_{23} = 0 \quad \text{perché piano}$$

$$I_{12} = - \int_0^a \int_0^b \rho(x, y) xy dx dy \rightarrow - \rho \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} = - M \frac{ab}{4}$$

$$\left(- \sum_p m_p x_{p,1} x_{p,2} \right)$$

$$I = \begin{pmatrix} M \frac{b^2}{3} & -M \frac{ab}{4} & \vdots & 0 \\ -M \frac{ab}{4} & M \frac{a^2}{3} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{M}{3} (a^2 + b^2) & \vdots \end{pmatrix}$$

Triangolo rettangolo (rispetto ad O)



$\rho(x, y)$

$$b = OB \cos \theta$$

$$h = OB \sin \theta$$

$$x = L \cos \theta$$

$$y = L \sin \theta = \frac{x}{\cos \theta} \sin \theta = x \frac{h}{b}$$

$$I_{11} = \int_0^b dx \int_0^{x \frac{h}{b}} dy y^2 \rho(x, y)$$

omogenea

$$\rho \int_0^b dx \frac{1}{3} \left(\frac{h}{b} x \right)^3 = \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{b} \right)^3 \frac{b^4}{4}$$

$$= \frac{\rho}{12} h^3 b = \rho \frac{hb}{2} \frac{h^2}{6} = M \frac{h^2}{6}$$

$$I_{22} = \int_0^b dx x^2 \int_0^{\frac{h}{b} x} \rho dy \xrightarrow{\text{omogenea}} \rho \int_0^b x^2 \frac{h}{b} x dx$$

$$= \rho \frac{h}{b} \frac{b^4}{4} = \rho \frac{hb}{2} \frac{b^2}{2} = M \frac{b^2}{2}$$

$$I_{12} = - \int_0^b x \int_0^{x \frac{h}{b}} y \rho dx dy \xrightarrow{\text{omogenea}} - \rho \int_0^b x \left(\frac{h}{b} x \right)^2 \frac{1}{2} dx$$

$$= - \rho \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2} \frac{b^4}{4} = - \rho \frac{hb}{2} \frac{bh}{4} = - M \frac{bh}{4}$$

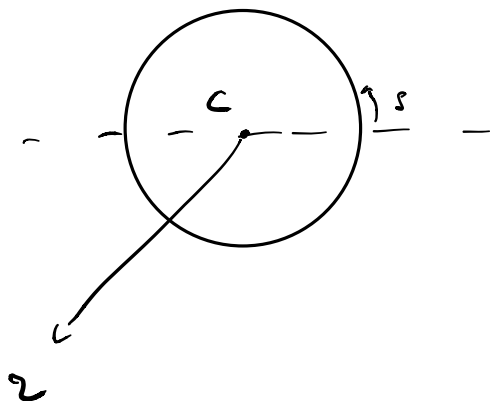
$$I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

perché
piano

$$I_0 = \begin{pmatrix} M \frac{h^2}{6} & -M \frac{bh}{4} & 0 \\ -M \frac{bh}{4} & M \frac{b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & M \left(\frac{h^2}{6} + \frac{b^2}{2} \right) \end{pmatrix}$$

Circonfrenza



(rispetto alla retta z
passante per il centro e
ortogonale al piano della
circonfrenza)

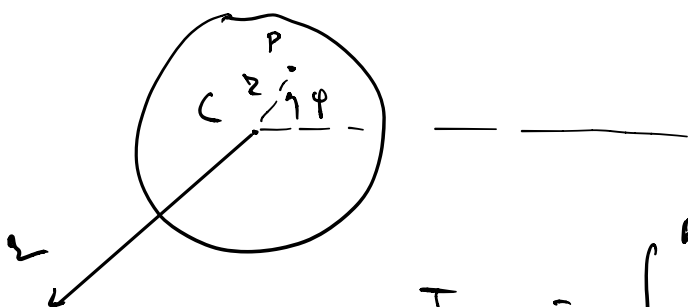
$$I_z = \int_0^{2\pi R} \rho(s) R^2 ds = M R^2$$

$$M = \int_0^{2\pi R} \rho(s) ds$$

Cerchio

(rispetto alla retta z , passante
per il centro e $\perp$ al piano)

Coordinate polari z, φ



$$I_{z_c} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho(z, \varphi) z^2 z d\varphi dz$$

Assumiamo $\rho = \rho(r)$

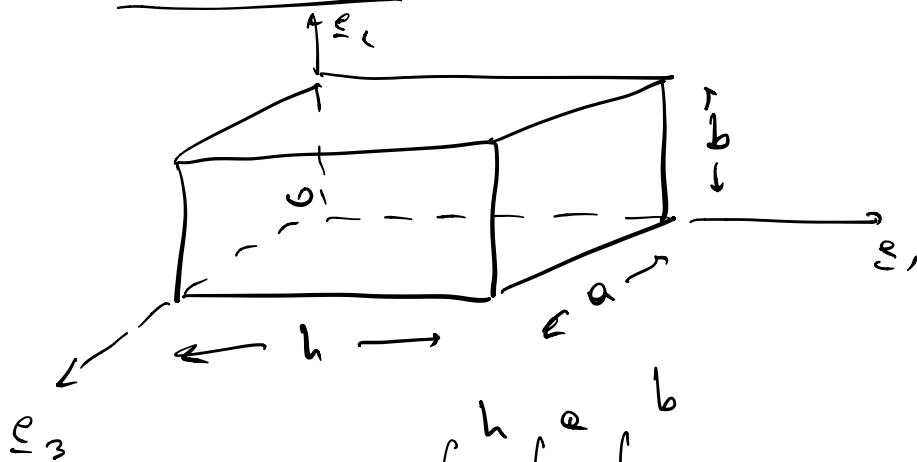
$$I_{zc} = 2\pi \int_0^R \rho(r) r^3 dr$$

omogeneo
→

$$\pi \rho \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}$$

↑
 $M = \pi R^2 \rho$

Parallelipipedi



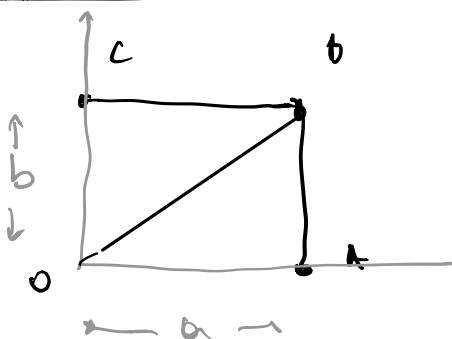
$\rho(x, y, z)$

$$I_{xx} = \int_0^h \int_0^a \int_0^b \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz$$

omogeneo
→

$$\rho \int_0^h \frac{ab}{3} (a^2 + b^2) dx = M \frac{(a^2 + b^2)}{3}$$

Esercizio



$\vec{e}$ OB un'axe
principale di inerzia?

retto OB ha versore

$$\underline{u} = \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$I_0(\underline{u}) = \begin{pmatrix} (m_C + m_B) b^2 & -m_B a b & 0 \\ -m_B a b & (m_A + m_B) a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m_C + m_B) b^2 + (m_A + m_B) a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} (m_C + m_B) b^2 a - m_B a b^2 \\ -m_B a^2 b + (m_A + m_B) a^2 b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} m_C b^2 a \\ m_A a^2 b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

API : $I_0(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$

also we have $\lambda = m_C b^2 = m_A a^2$