FERMIONI LIBERI

$\downarrow$

azione quadratica

$$S = \frac{1}{2} A_{ab} \theta^a \theta^b \qquad A \text{ antisimmetrica}$$

$a, b = 1, \dots, 2m$

FUNZ. DI PARTIZIONE

$$Z_0 = \int d^{2m}\theta \, e^{-\frac{1}{2\hbar} A_{ab}\theta^a\theta^b} =$$

$$= \int \underbrace{d^{2m}\theta}_{d\theta^{2m}\cdots d\theta^1} \left(\cancel{1 - \frac{1}{2\hbar} A_{ab}\theta^a\theta^b} + \dots + \frac{(-1)^m}{(2\hbar)^m m!} (\underbrace{A_{ab}}_{\sum_{a,b}}\theta^a\theta^b)^m + \dots \right)$$

$$\underbrace{d\theta^{2m}\cdots d\theta^1}_{2m}$$

$$= \int d^{2m}\theta \, \frac{(-1)^m}{(2\hbar)^m m!} A_{a_1 a_2} A_{a_3 a_4} \cdots A_{a_{2m-1} a_{2m}} \theta^{a_1} \cdots \theta^{a_{2m}}$$

$$= \frac{(-1)^m}{(2\hbar)^m m!} \epsilon^{a_1 \dots a_{2m}} A_{a_1 a_2} \cdots A_{a_{2m-1} a_{2m}}$$

$$\mathrm{Pfaff}(A) = \sqrt{\det A}$$

$$= \frac{(-1)^m}{(\hbar)^m} \mathrm{Pfaff}(A)$$

$$Z_0 = \pm \sqrt{\frac{\det A}{\hbar^n}} \qquad n = 2m$$

L'inverso di ciò che accade nel caso bosonico, dove

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(2\pi\hbar)^n}{\det A}} \qquad A \text{ sym.}$$

[⇒ Se vogliamo scrivere det di un operatore come un integrale sui cammini di $e^{-S/\hbar}$, dobbiamo utilizzare dei campi a valori nei numeri di Grassmann (vedi Ghosts in quantizzazione BRST di teorie di gauge)]

Funz. di partizione in presenza di sorgenti esterne.

[Nel caso bosonico $Z_0[J]$]

Grassmann number

$$S \to S + \eta_a \theta^a$$

$$Z_0[\eta] = \int d^n\theta \; e^{-\frac{1}{2\hbar}\theta^a A_{ab}\theta^b - \eta_a\theta^a/\hbar}$$

$$= \int d^n\theta \; e^{-\frac{1}{2\hbar}\left(\theta^a + \eta_c (A^{-1})^{ca}\right)A_{ab}\left(\theta^b + \eta_d (A^{-1})^{db}\right) + \frac{1}{2\hbar}\eta_c (A^{-1})^{dc}\eta_d}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\hbar}\eta_c (A^{-1})^{cd}\eta_d} \underbrace{\int d^n\theta' \; e^{-\frac{1}{2\hbar}\theta'^a A_{ab}\theta'^b}}_{Z_0(0)}$$

Correlatori sono calcolati derivando $Z_0(\eta)$ rispetto a η (e ponendo alla fine $\eta = 0$)

Es.)

$$\langle \theta^a \theta^b \rangle = \frac{\hbar^2}{Z_0(0)} \frac{\partial^2 Z_0(\eta)}{\partial\eta_a \, \partial\eta_b}\Bigg|_{\eta=0} =$$

$$\overset{*}{=} -\hbar^2 \frac{(A^{-1})^{ba}}{\hbar} = \hbar \, (A^{-1})^{ab}$$

analogo al caso bosonico

$S = +\frac{1}{2}A_{ab}\theta^a\theta^b$

$$\left[* \quad \frac{\partial}{\partial \eta_a} \frac{\partial}{\partial \eta_b} \left(-\frac{1}{2\hbar} \underbrace{\eta_c (A^{-1})^{cd} \eta_d}_{\sum_{c,d}} \right) = \right.$$

$$\left. = \frac{\partial}{\partial \eta_a} \left(-\frac{1}{\hbar} (A^{-1})^{bd} \eta_d \right) = -\frac{1}{\hbar} (A^{-1})^{ba} \right]$$

SUPERSYMMETRIC LOCALIZATION

Per una generica QFT la funzione di partizione è calcolabile solo perturbativamente (serie asintotica)

Per teorie particolari, la funz. di part. o correlatori può essere calcolata in maniera ESATTA
$\longrightarrow$ fenomeno della "localizzazione".

Toy model : teoria $d=0$ con

un bosone ϕ

due fermioni ψ_1, ψ_2

azione $S(\phi, \psi_i)$

Funz. di part.

$$Z = \int \frac{d\phi \, d\psi_1 \, d\psi_2}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-S(\phi, \psi_1 \psi_2)/\hbar}$$

Scegliamo azione

$$S = \frac{1}{2}(\partial h)^2 - \psi_1 \psi_2 \, \partial^2 h$$

dove $h = h(\phi)$

(Se h è quadratica ho teoria libera, altrimenti abbiamo termini di interazione)

Consideriamo le trasformazioni

\# Grassmann

$$\left.\begin{aligned} \delta\phi &= \epsilon_1 \psi_1 + \epsilon_2 \psi_2 \\ \delta\psi_1 &= \epsilon_2 \, \partial h \\ \delta\psi_2 &= -\epsilon_1 \, \partial h \end{aligned}\right\}$$

TRASFORMAZIONI DI SUPERSIMMETRIA

↳ Azione invariante per susy deve avere vincoli che legano termini bosonici con termini fermionici

Azione S è invariante sotto susy:

$$S = \frac{1}{2}(\partial h)^2 - \psi_1 \psi_2 \, \partial^2 h$$

$$\delta S = (\partial h) \, \partial^2 h \, \delta\phi - \delta\psi_1 \, \psi_2 \, \partial^2 h - \psi_1 \, \delta\psi_2 \, \partial^2 h - \cancel{\psi_1 \psi_2 \, \partial^3 h \, \delta\phi}$$

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \epsilon_1 \psi_1 + \epsilon_2 \psi_2 \\ \delta\psi_1 &= \epsilon_2 \, \partial h \\ \delta\psi_2 &= -\epsilon_1 \, \partial h \end{aligned}$$

$$= (\partial h)\,\partial^2 h\,(\epsilon_1\psi_1 + \epsilon_2\psi_2) - \epsilon_2\,\psi_2\,(\partial h)\,\partial^2 h - \epsilon_1\,\psi_1\,(\partial h)\,\partial^2 h$$
$$= 0 \quad //$$

La misura del P.I. è invariante

$$\underline{d\phi' d\psi_1' d\psi_2'} = (d\phi + \epsilon_1 d\psi_1 + \epsilon_2 d\psi_2)(d\psi_1 + \epsilon_2 \partial^2 h\, d\phi)$$
$$(d\psi_2 - \epsilon_1 \partial^2 h\, d\phi) =$$
$$= \underline{d\phi\, d\psi_1\, d\psi_2} + \epsilon_1\, \cancel{d\psi_1}\, \epsilon_2\, \partial^2 h\, d\phi\, d\psi_2$$
$$- \epsilon_2\, d\psi_2\, \cancel{d\psi_1}\, \epsilon_1\, \partial^2 h\, d\phi$$

Le trasf. di susy sono NILPOTENTI (Es. matrice nilp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$)

Facciamo trasf.-ϵ_1 :

$$\delta_1 \phi = \epsilon_1 \psi_1 \Rightarrow \delta_1^2 \phi = \epsilon_1 \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\delta\psi_1}} = 0$$
$$\delta_1 \psi_1 = 0 \qquad \delta_1 \psi_2 = -\epsilon_1 \partial h \Rightarrow \delta_1^2 \psi_2 = -\epsilon_1\, \partial^2 h\, \delta\phi =$$
$$= -\epsilon_1 \partial^2 h\, \epsilon_1 \psi_1 = 0$$

Stesso risultato per trasf.-ϵ_2.

$$\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1 = 0$$

Per es. $[\delta_1, \delta_2]\,\phi = \delta_1(\epsilon_2 \psi_2) - \delta_2(\epsilon_1 \psi_1) =$

$$= -\epsilon_2 \epsilon_1 \partial h - \epsilon_1 \epsilon_2 \partial h = 0$$

Localizzazione :

Sia δO la variaz. supersimm. di qualche "operatore" $O(\phi, \psi_1, \psi_2)$

$$\langle \delta O \rangle = \frac{1}{Z} \int d\phi\, d^2\psi\, e^{-S} \delta O \overset{S \text{ è inv.}}{=}$$

$\delta\phi = \epsilon_1 \psi_1 + \epsilon_2 \psi_2$
$\delta\psi_1 = \epsilon_2 \partial h$
$\delta\psi_2 = -\epsilon_1 \partial h$

$$= \frac{1}{Z} \int d\phi\, d^2\psi\, \delta\big(\underbrace{e^{-S} O}_{} \big)$$

funzione di ϕ, ψ_1, ψ_2

$$(\star) \quad \| \quad f_0(\phi) + f_1(\phi)\psi_1 + f_2(\phi)\psi_2 + f_{12}(\phi)\psi_1\psi_2$$

(a) - quando susy agisce sugli ψ_i, il termine risultante non contiene quel $\psi_i \rightsquigarrow \int d\psi_i \cdot 1 = 0$

(b) - quando la susy agisce su ϕ, se ptp termine sopravvive all'integrazione, sarà una derivata totale in ϕ

$$\Rightarrow \quad \langle \delta O \rangle = 0$$

(se O non disturba il decadimento esponenziale di e^{-S} per $|\phi| \to \infty$)

Vediamo nel dettaglio considerazioni (a) e (b) :

$$\int d\psi_2 d\psi_1 \, \delta \left[f_0(\phi) + f_1(\phi)\psi_1 + f_2(\phi)\psi_2 + f_{12}(\phi)\psi_1\psi_2 \right]$$

$\delta\phi = \epsilon_1\psi_1 + \epsilon_2\psi_2$

$\delta\psi_1 = \epsilon_2 \partial h$

$\delta\psi_2 = -\epsilon_1 \partial h$

$$\parallel$$

$$\int \underline{d\psi_2 d\psi_1} \Big[f_0'(\phi)\cancel{(\epsilon_1\psi_1 + \epsilon_2\psi_2)} + f_1'(\phi)(\cancel{\epsilon_1\psi_1} + \epsilon_2\psi_2)\psi_1 + \cancel{f_1(\phi)\epsilon_2}\partial h$$

$$+ f_2'(\phi)(\epsilon_1\psi_1 + \cancel{\epsilon_2\psi_2})\psi_2 - \cancel{f_2(\phi)\epsilon_1}\partial h$$

$$+ f_{12}'(\phi)(\cancel{\epsilon_1\psi_1} + \cancel{\epsilon_2\psi_2})\psi_1\psi_2 +$$

$$+ f_{12}(\phi)(\cancel{\epsilon_2\partial h\psi_2} - \cancel{\psi_1\epsilon_1\partial h}) \Big]$$

$$= -\epsilon_2 f_1'(\phi) + \epsilon_1 f_2'(\phi) = \frac{d}{d\phi}\Big(\overbrace{\epsilon_1 f_2(\phi) - \epsilon_2 f_1(\phi)}^{F(\phi)} \Big)$$

derivata totale

$$\int d\phi \, d\psi_2 d\psi_1 \, \delta(e^{-S}(\phi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \, \frac{d}{d\phi} F(\phi)$$

$F(\phi) \to 0$ per $\phi \to \pm\infty$

per convergenza dell'integrale iniziale.