Funzionale generatore delle funzioni di Green connesse

Definiamo $W[J]$ da $\quad W[J] = -i \log Z[J]$

$$Z[J] = e^{iW[J]} = 1 + \underset{\text{connessi}}{iW[J]} + \underset{\text{connessi in 2 pezzi}}{\frac{1}{2} i^2 W[J]^2} + \dots$$

la sua espansione di Taylor è in termini delle funzioni di Green connesse

$$iW[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \, J(x_1) \dots J(x_n) \, G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{-i\,\delta}{\delta J_1}\right) \dots \left(\frac{-i\,\delta}{\delta J_n}\right) iW[J] \Big|_{J=0}$$

$Z[0] = e^{iW[0]}$ ← somma di diagrammi connessi vuoto-vuoto

$W[J] = W[0] + W'[J]$ ← tutto il resto.

$$Z[J] = e^{iW[0]} e^{iW'[J]} = Z[0] \, e^{iW'[J]}$$

Per la teoria libera abbiamo $Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y\right\}$

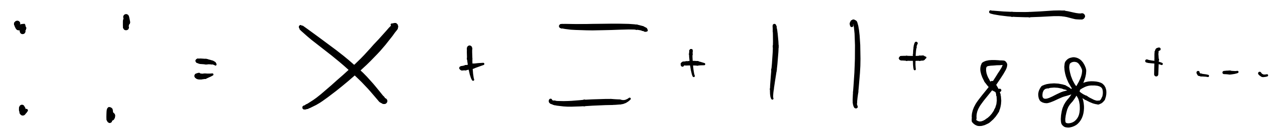
Per la teoria libera $iW_0[J] = -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + \text{const}$

$$\Rightarrow \quad G_c^{(2)}(x,y) = D_F(x-y) \quad , \quad G_c^{(n>2)} = 0$$

Dimostriamo in generale:

$$G(x_1,\dots,x_n) = G_c(x_1,\dots,x_n) + \sum_{\substack{\text{MODI DI}\\ \text{SCOMPORRE } n \text{ PUNTI}\\ \text{IN SOTTOINSIEMI}}} G_c(\dots)\,G_c(\dots)\dots G_c(\dots)$$

e.g.



1) $G(x) = G^c(x)$

2) $G(x_1,x_2) = G^c(x_1,x_2) + G^c(x_1)\,G^c(x_2) \;\rightarrow\; G^c(x_1,x_2) = G(x_1,x_2) - G(x_1)\,G(x_2)$

3) $G(x_1,x_2,x_3) = G^c_{123} + G^c_1\,G^c_{23} + G^c_2\,G^c_{13} + G^c_3\,G^c_{12} + G^c_1\,G^c_2\,G^c_3$

$$= G^c_{123} + G_1 G_2 G_3 + \left(G_1 G_{23} + \text{perm}\right) - 3\,G_1 G_2 G_3$$

$$\rightarrow\; G^c_{123} = G_{123} - \left(G_1 G_{23} + \text{perm}\right) + 2\,G_1 G_2 G_3$$

Confrontiamo con quanto si ottiene da $Z[J] = e^{W[J]}$

NOTAZIONE: $X_1 = \dfrac{\delta X}{\delta J(x_1)}$

$$G^c_{12\dots n} = \frac{\partial}{12\dots n}(\ln Z)\Big|_{J=0} \equiv (\ln Z)_{12\dots n}\Big|_{J=0}$$

1) $G^c_1 = (\ln Z)_1 = \dfrac{1}{Z} Z_1\Big|_{J=0} = \dfrac{1}{Z[0]} \dfrac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\Big|_{J=0} = G_1$

2) $G^c_{12} = \left(\dfrac{Z_1}{Z}\right)_2\Big|_{J=0} = \dfrac{Z_{12}}{Z} - \dfrac{Z_1 Z_2}{Z^2}\Big|_{J=0} = G_{12} - G_1 G_2$

3) $G^c_{123} = \dfrac{Z_{123}}{Z} - \dfrac{Z_{12}}{Z}\dfrac{Z_3}{Z} - \dfrac{Z_{13}}{Z}\dfrac{Z_2}{Z} - \dfrac{Z_1}{Z}\dfrac{Z_{23}}{Z} + 2\,\dfrac{Z_1}{Z}\dfrac{Z_2}{Z}\dfrac{Z_3}{Z} = G_{123} - \left(G_1 G_{23} + \text{perm}\right) + 2\,G_1 G_2 G_3$

$\Rightarrow$ CORRETTO

Interazioni & Regole di Feynman dal PI

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi)$$

NOTAZIONE

$$\langle \cdot \rangle = \int d^4x \; \cdot(x)$$

$$Z[J] = \int D\varphi \; e^{i\int d^4x \left[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + J\varphi\right]}$$

Ricordiamo che $-i \dfrac{\delta}{\delta J(y)} e^{i\int d^4x \, J(x)\varphi(x)} = \varphi(y) \, e^{i\int d^4x \, J(x)\varphi(x)}$

È vero che in generale, per una funzione arbitraria di φ:

$$F(\varphi) \, e^{i\langle J\varphi\rangle} = F\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right) e^{i\langle J\varphi\rangle}$$

$$Z[J] = \int D\varphi \; e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} \, e^{i\langle \mathcal{L}_0 + J\varphi\rangle}$$

indip. da φ — teoria libera

$$= e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} \int D\varphi \; e^{i\langle \mathcal{L}_0 + J\varphi\rangle} = e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} Z_0[J]$$

$$= e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} Z_0[0] \, e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}$$

Espandiamo in th. delle perturbazioni $e^{i\langle\mathcal{L}_I\rangle}$ attorno a 1

$$e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} \simeq 1 + i\left\langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\rangle + \dots$$

$$Z[J] = Z_0[J] \left\{ 1 + Z_0[J]^{-1} \left[e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} - 1 \right] Z_0[J] \right\}$$

Il funzionale gen. delle funzioni di Green CONNESSE mi dà:

$$Z_0[J] = Z_0[0]\, e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}$$

$$iW[J] = \log Z[J] = \text{cost} - \frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y +$$

$$+ \log\left(1 + i Z_0[J]^{-1} \left\langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\rangle Z_0[J]\right)$$

$$iW[J] \simeq \text{Cost} - \frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + i\left(e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\right)^{-1} \left\langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\rangle e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}$$

Connected Green functions are obtained by:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{-i\,\delta}{\delta J_1}\right) \cdots \left(\frac{-i\,\delta}{\delta J_n}\right) iW[J]\Big|_{J=0}$$

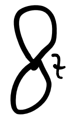
Feynman rules are given by tree-level connected Green functions.

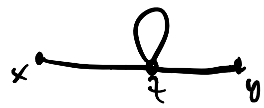
$\Rightarrow$ Each $\frac{\delta}{\delta J_1}$ must act on a term $\sim D_{zy} J_y$ where z is the coordinate of the interaction lagrangian. So each $\frac{\delta}{\delta J(z)}$ inside $\mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)$ must bring down a $D_{zy} J_y$ from the exponent.

Example: $\mathcal{L}_I(\varphi) = -\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$

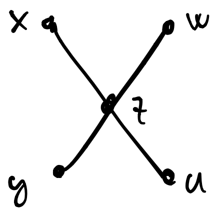
$$iW[J] = -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + i\left(e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\right)^{-1} \int d^4 z \,\frac{(-\lambda)}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y - i\frac{\lambda}{4!}\Big(3 D_{zz}^2 - 6 D_{zz} D_{xz} D_{yz} J_x J_y +$$





$$+ D_{zx} D_{zy} D_{zw} D_{zu} J_x J_y J_w J_u\Big) + O(\lambda^2)$$



$$G_c^{(4)}(1,2,3,4) = (-i)\frac{\delta}{\delta J_1}(-i)\frac{\delta}{\delta J_2}(-i)\frac{\delta}{\delta J_3}(-i)\frac{\delta}{\delta J_4}\, iW[J]\Big|_{J=0} =$$

$$= -i\frac{\lambda}{4!}\,4!\, D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z} = -i\lambda\left(D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z}\right)$$

Elemento di matrice S da LSZ (fisso $Z=1$ a livello albero)

$$S_{if} = i(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2+q_3+q_4)\,M = i^4 \int d^4x_1 \dots d^4x_4\, e^{-i(q_1 x_1 + \dots + q_4 x_4)}$$

$$(\Box_1 + m^2)\dots(\Box_4+m^2)\, G_c^{(4)}(1,2,3,4) =$$

$$\left(\Box_x + m^2\right) D_{xy} = -i\delta^4(x-y)$$

$$= \cancel{i^4}\,\cancel{(-i)^4} \int d^4 z\,(-i\lambda)\, e^{-i(q_1+q_2+q_3+q_4) z} = -i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2+q_3+q_4)$$

$$\Rightarrow \boxed{iM = -i\lambda}$$

$$S_{i\to f} = {}_{out}\langle p_1,\dots,p_n | q_1, q_2, \dots, q_m\rangle_{in} = \left(iZ^{-1/2}\right)^{n+m} \int \prod_{i=1}^{m} d^4x_i \prod_{j=1}^{n} d^4 y_j\, e^{i(p_j y_j - q_i x_i)}$$

$$\times\, (\Box_{x_1} + m^2)\dots(\Box_{y_n}+m^2)\,\langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(y_n)\}|0\rangle$$

+ (termini sconnessi)

In generale

Un'interazione $S_I = \int d^4z \; g \; \varphi^n(z) \; \chi^m(z)$

genererà un termine per $W[J]$:

$$iW \supset i\left(e^{-\frac{1}{2}\left(J^\varphi_x D^\varphi_{xy} J^\varphi_y + (\varphi \to \chi)\right)}\right)^{-1} \langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\varphi}, -i\frac{\delta}{\delta J^\chi}\right)\rangle \left(e^{-\frac{1}{2}\left(J^\varphi_x D^\varphi_{xy} J^\varphi_y + (\varphi \to \chi)\right)}\right)$$

$$= i g (i)^{n+m} \int d^4z \prod_{i=1}^{n} \int d^4x_i \prod_{j=1}^{m} d^4y_j \; D^\varphi_{zx_i} J^\varphi_{x_i} D^\chi_{zy_j} J^\chi_{y_j} + \ldots$$ termini con meno potenze di J

La funzione di Green

$$G^{(n+m)} = \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \chi(y_1) \ldots \chi(y_m)\} | 0 \rangle = (-i)^{n+m} \left(\frac{\delta}{\delta J^\varphi}\right)^n \left(\frac{\delta}{\delta J^\chi}\right)^m W[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= \int d^4z \; i g \; n! m! \prod_{i=1}^{n} D^\varphi_{zi} \prod_{j=1}^{m} D^\chi_{zj}$$

ELEMENTO DI MATRICE S $\Rightarrow$ $M(\varphi^n, \chi^m) = i g \; n! m!$ ← REGOLA DI FEYNMAN

Lo stesso risultato si ottiene facendo:

$$M(\varphi^n, \chi^m) = \left(\frac{\delta}{\delta \varphi}\right)^n \left(\frac{\delta}{\delta \chi}\right)^m S_I$$

Nello spazio dei momenti:

Prendiamo la trasformata di Fourier

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \tilde{\varphi}(p)\, e^{-ipx}$$

Nel caso di interazioni derivative:

$$\partial_\mu \varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-ip_\mu)\, \tilde{\varphi}(p)\, e^{-ipx}$$

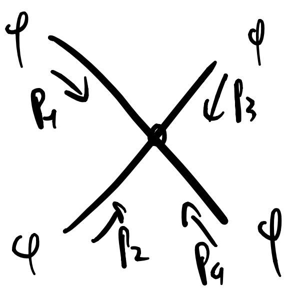
<u>Esempio:</u> $S_I = \int d^4x\, g\, \varphi^2 (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)$

$$S_I = \int d^4x \int \frac{d^4p_a}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_b}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_d}{(2\pi)^4}\, e^{-i(p_a+p_b+p_c+p_d)x}\, \tilde{\mathcal{L}}_I(p_a, p_b, p_c, p_d)$$

$$= \int \frac{d^4p_a}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_b}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_d}{(2\pi)^4}\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a+p_b+p_c+p_d)\, \tilde{\mathcal{L}}_I(p_a, p_b, p_c, p_d)$$

dove $\tilde{\mathcal{L}}_I = g\, \tilde{\varphi}(p_a)\, \tilde{\varphi}(p_b)\, (-ip_c^\mu)\, \tilde{\varphi}(p_c)\, (-ip_{d\mu})\, \tilde{\varphi}(p_d)$

REGOLA DI FEYNMAN NELLO SPAZIO DEI MOMENTI



$$= i \frac{\delta}{\delta\varphi(p_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\varphi(p_4)} \tilde{\mathcal{L}}_I$$

$$= ig\, 2\cdot 2\, (-1) \left[p_1\cdot p_2 + p_1\cdot p_3 + p_1\cdot p_4 + p_2\cdot p_3 + p_2\cdot p_4 + p_3\cdot p_4 \right]$$

Azione Effettiva [Se.4.1, W.16.1]

$$Z[J] = \langle 0|0\rangle_J = \int D\varphi \; e^{iS[\varphi] + i\langle J\varphi\rangle} = e^{iW[J]}$$

$W[J]$: generatore delle funz. di Green connesse.
Abbiamo già visto che

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -i\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J} = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle_J \equiv \Phi$$

CAMPO CLASSICO

$$\boxed{\Phi(J) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J}}$$

Prendiamo la trasformata di Legendre di $W[J]$:

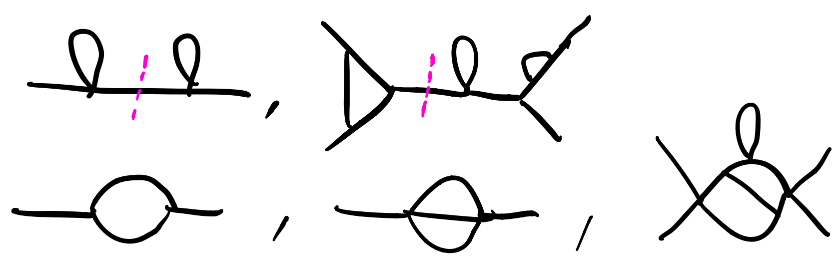
$$\Gamma(\Phi) = W[J] - \int d^4x \, \Phi(x) J(x)$$ ← AZIONE EFFETTIVA

dove $J(x) = J(\Phi(x))$ si ottiene invertendo $\Phi(J)$

$\Gamma(\Phi)$ è il funzionale generatore dei diagrammi 1PI (one-particle irreducible)

1PI Diagrammi che non possono essere divisi in 2 tagliando una sola linea interna (un solo propagatore)

e.g.:



: non-1PI

: 1PI

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi(x)} = \int d^4y \Big(\underbrace{\frac{\delta W}{\delta J(y)} - \Phi(y)}_{=0} \Big) \frac{\delta J(y)}{\delta\Phi(x)} - J(x) = -J(x)$$

when $J=0$: $\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi}=0$ → equazione del moto di Φ con azione Γ. Per questo si chiama azione effettiva: include tutte le correzioni quantistiche.

$$\boxed{\text{Tutte le ampiezze di scattering (a tutti gli ordini) possono essere calcolate come somma dei diagrammi connessi al LIVELLO ALBERO ottenuti da } \Gamma(\Phi) \text{ invece che } S(\varphi).}$$

DIMOSTRAZIONE

Definiamo il funzionale generatore partendo da $\Gamma(\varphi)$ invece che $S(\varphi)$:

$$e^{iW_\Gamma[J]} = \int D\varphi\, e^{\frac{i}{\lambda}\left(\Gamma(\varphi) + \int d^4x\, \varphi(x) J(x)\right)}$$

dove "λ" gioca il ruolo di $\hbar$ per contare i loop.

Il contributo a livello albero è dato dal limite $\lambda \to 0$ (ovvero il limite classico). Dal principio di fase stazionaria:

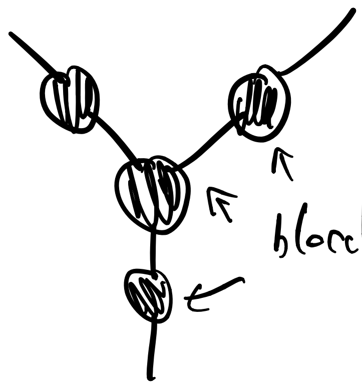
$$\lim_{\lambda\to 0} e^{iW_\Gamma[J]} = \exp\left(\frac{i}{\lambda} W_\Gamma^{(0)}(J)\right) = \exp\left[\frac{i}{\lambda}\left(\Gamma(\Phi) + \int d^4x\, \Phi(x) J(x)\right)\right]$$

dove $\Phi(x)$ estremizza l'azione $\Gamma(\Phi)$: $\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}\right|_{\varphi=\Phi} + J(x) = 0$

$\Rightarrow W_\Gamma^{(0)}(J) = \Gamma(\Phi) + \int d^4x \, \Phi(x) J(x) = W[J]$

questa è proprio la relazione per il funzionale generatore di TUTTE le FUNZIONI DI GREEN CONNESSE calcolate con $S(\varphi)$.

$$i W[J] = \int_{\substack{\text{diagrammi} \\ \text{connessi al livello} \\ \text{albero}}} D\phi \; e^{i\Gamma(\phi) + i\langle J\phi\rangle}$$



$\Rightarrow$ Il problema è che non conosciamo $\Gamma(\Phi)$ a tutti gli ordini

Γ si può ottenere direttamente da $S(\varphi)$ calcolando tutti i diagrammi 1PI:

$$e^{i\Gamma[\varphi_0]} = \int_{1PI} D\varphi \; e^{iS(\varphi_0 + \varphi)}$$

Data una configurazione classica φ_0, qui integriamo su tutte le correzioni quantistiche.

Per configurazioni $\varphi_0(x) \equiv \varphi_0$: indip. da x

$$\Gamma[\varphi_0] = -\underset{\uparrow \text{volume}}{V_4} \; V_{eff}(\varphi_0) \leftarrow \text{POTENZIALE EFFETTIVO}$$