Se le forze sono puramente potenziali, possiamo definire una funz., detta LAGRANGIANA L

$$L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$$
$$(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \,,$$

data da
$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - V(\bar{q}, t)$$

le EQUAZIONI DEL MOTO (dette EQ. DI LAGRANGE) sono determinate dalla Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) - \frac{\partial}{\partial q_k} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = 0 \qquad (*)$$

$\longrightarrow$ EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE in $\bar{q}(t)$.

<u>Prop.</u> Dato sist. olonomo di N pti mat. a n gradi di lib., con assegnati DATI INIZIALI $(\bar{r}_i^{(0)}, \bar{v}_i^{(0)})$ compatibili con i vincoli, allora le eq. di Lagr. $(*)$ determinano UNIVOCAMENTE $\bar{r}_i(t)$ e ci permettono di trovare le $\bar{\Phi}_i$.

Dim. $\quad \bar{r}_i(\bar{q}, t) \qquad \bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

$\bar{r}_i^{(0)}, \bar{v}_i^{(0)} \rightsquigarrow \bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0$

Teorema di esistenza e unicità

$\Rightarrow$ eq. $(*)$ eq. 2° ord. in $\bar{q}(t)$ $\Longrightarrow$ $\bar{q}(t)$ è determinata da $\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0$

$\Rightarrow \underline{\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t)} \Rightarrow$

noto a priori

$\Rightarrow$ determinare $\bar{a}_i = \dfrac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} \Rightarrow \bar{\Phi}_i = m\bar{a}_i - \bar{F}_i$

determinata

//

Invarianza per cambiamento di coordinate

- Sist. vincolato $\quad \underline{\bar{r}_i(\bar{q},t)}$ ⇝ $\underline{\bar{v}_i(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)}$

Scelta di coord. per Q

"Mettiamo queste funz." dentro $T(\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_N)$ e $V(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_N)$

⇝ $L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$ ⇝ eq. del moto

- Scelta di coord per Q è ARBITARIA:

posso scegliere $\{q_h\}$ o $\{\tilde{q}_h\}$ (diversi sistemi di coord.)

$$\begin{array}{ccc}
\{q_h\} & & \{\tilde{q}_h\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) & \xleftrightarrow[\text{cambi, coord.}]{} & \tilde{L}(\tilde{\bar{q}},\dot{\tilde{\bar{q}}},t) \\
\rightsquigarrow & & \rightsquigarrow \\
\text{Eq. del moto} & & \text{Eq. del moto} \\
\text{(eq. diff. nelle funz. } \bar{q}(t)\text{)} & & \text{(eq. diff. nelle funz. } \tilde{\bar{q}}(t)\text{)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Soluz. } \bar{q}(t) & & \text{Soluz. } \tilde{\bar{q}}(t) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bar{r}_i(t)=\bar{r}_i(\bar{q}(t),t) & = & \bar{r}_i(t)=\bar{r}_i(\tilde{\bar{q}}(t),t)
\end{array}$$

Espressione analitica della Lagrangiana è diversa nei due sist. di coord.

$\Rightarrow \quad \bar{q}(t) = \bar{q}(\tilde{\bar{q}}(t),t)$ dove $\bar{q}=\bar{q}(\tilde{\bar{q}},t)$ è il cambiam. di coordinate

CAMBIAM. di COORD.

$$q_h = q_h(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, t) \qquad \text{t.c.} \quad \det\left(\frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_K}\right) \neq 0 \qquad (*)$$

$$\dot{q}_h = \dot{q}_h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_k + \frac{\partial q_h}{\partial t}$$

Prop. Dato sist. Lagrangiano con Lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$, si consideri il camb. di coord (regolare e invertibile) $(*)$ e sia $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t)$ la Lagrangiana ottenuta da L per sostituzione, cioè

$$\tilde{L}(\bar{\tilde{q}}, \dot{\bar{\tilde{q}}}, t) \equiv L(\bar{q}(\bar{\tilde{q}}, t), \dot{\bar{q}}(\bar{\tilde{q}}, \dot{\bar{\tilde{q}}}, t), t).$$

Allora $\bar{\tilde{q}}(t)$ è soluz. delle eq. di Lag. con Lag. $\tilde{L}$ se e solo se $\bar{q}(t)$ è soluz. di e.d.L. con Lag. L.

Dim

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_K} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_K}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} =$$

δ_{Kh}

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_h}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{\ell=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}\right) \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_h}}\right]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 q_\ell}{\partial \tilde{q}_h \partial \tilde{q}_m} \dot{\tilde{q}}_m + \frac{\partial^2 q_\ell}{\partial \tilde{q}_h \partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_h} \left[\sum_m \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_m} \dot{\tilde{q}}_m + \frac{\partial q_\ell}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_h} \dot{q}_\ell$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{\ell=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}\right) \frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial \tilde{q}_h}\right]$$

$$\tilde{L}(\tilde{\bar q},\dot{\tilde{\bar q}},t) \equiv L\left(\bar q(\tilde{\bar q},t),\ \dot{\bar q}(\tilde{\bar q},\dot{\tilde{\bar q}},t),t\right)$$

$$\frac{\partial \tilde L}{\partial \tilde q_h} = \sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\ell}\frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde q_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial \dot q_\ell}{\partial \tilde q_h}\right] \qquad \sum_{\ell=1}^{n} J_{h\ell}\,\nu_\ell$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot{\tilde q}_h} - \frac{\partial \tilde L}{\partial \tilde q_h}}_{\text{eq. Lag. } \tilde L \ (\tilde *)} = \sum_{\ell=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde q_h}\right)}_{\substack{J_{h\ell} \\ \text{invertibile}}}\cdot\Big[\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell}}_{\text{eq. Lag } L \ (*)}\Big] \quad \nu_\ell$$

Se $(*)$ sono sodd. $\Longrightarrow$ $(\tilde *)$ sono sodd. manifesto.

Se $(\tilde *)$ sono sodd. $\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{n} J_{h\ell}\,\nu_\ell = 0 \rightarrow J\cdot\bar\nu = 0$

$\xrightarrow[\text{destra e sin. per } J^{-1}]{\text{moltiplichiamo a}}$ $\bar\nu = 0 \Longrightarrow (*)$ sono sodd. //

Diverse Lagrangiane possono condurre alle stesse eq. del moto.

<u>Prop.</u> $\forall$ scelta della funzione $F(\bar q,t)$ e della cost. $c\neq 0$, la Lagrangiana $L(\bar q,\dot{\bar q},t)$ e la Lagrangiana

$$L'(\bar q,\dot{\bar q},t) = c\,L(\bar q,\dot{\bar q},t) + \varphi(\bar q,\dot{\bar q},t)$$

dove $\varphi(\bar q,\dot{\bar q},t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F}{\partial t}$

"derivata totale"

$$\varphi(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) = \frac{d}{dt}F(\bar q(t),t)$$

conducono alle medesime eq. di Lagrange.

"Lagrangiane che differiscono per una derivata totale sono (dinamicam.) EQUIVALENTI"

Dim.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_h} = c\,\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot q_h}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_h} = c\,\frac{\partial L}{\partial q_h} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h}\dot q_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = c\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}\right) \quad //.$$

$c \neq 0$

Potenziali dipendenti da velocità

$L = T - V$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad (\ddagger)$$

$$Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \quad \text{con} \quad V = V(\bar q, t)$$

Ci si può ridurre alla forma $(\ddagger)$ anche nel caso più generale

$$Q_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \quad \text{con} \quad V = V(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

ES) FORZA DI CORIOLIS (forza apparente in s.d.r. rotante con velocità angolare $\bar\omega$, che qui prendiamo cost.)

$$\bar F = 2m\, \dot{\bar q} \times \bar\omega$$

(forza centrifuga è una forza posizionale con $V_c(\bar q) = -\frac{1}{2} m\omega^2 d^2(\bar q)$ dist. da asse rotazione)

Prodotto vett. in $\mathbb{R}^3$

$$\bar v \times \bar u = \bar e_1 (v_2 u_3 - v_3 u_2) + \bar e_2 (v_3 u_1 - v_1 u_3) + \bar e_3 (v_1 u_2 - v_2 u_1)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} \bar e_1 & v_1 & u_1 \\ \bar e_2 & v_2 & u_2 \\ \bar e_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

$v_i \qquad u_j$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, \bar e_i\, v_j u_k$$

tensore totalm. antisimm. $(\epsilon_{iij} = 0)$

$\epsilon_{123} = 1$

$\epsilon_{213} = -1$

$\vdots$

Prop. La forza di Coriolis con $\bar\omega$ cost. si ricava attraverso

$$F_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \quad \text{con} \quad V_1(\bar q, \dot{\bar q}) = -m(\dot{\bar q} \times \bar\omega)\cdot \bar q$$

Dim. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \left(\sum_{ijk} \bar{e}_i a_j b_k \epsilon_{ijk} \right) \cdot \left(\sum_{\ell} c_\ell \bar{e}_\ell \right) =$

$$= \sum_i \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k \right) (c_i) =$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \, a_j b_k c_i = \sum_{ijk} \epsilon_{kij} \, b_k c_i a_j =$$

$$= \sum_j \left(\sum_{ki} \epsilon_{jki} b_k c_i \right) a_j = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

$$V_1 = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q} = -m \, \dot{\bar{q}} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{q})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_h} = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \bar{q})_h \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}})_h = m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$F_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} = 2m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$\bar{F} = 2m \, \dot{\bar{q}} \times \bar{\omega} \quad //$$

$$L = T - V_c - V_1$$

en. cin in coord q nel s.d.r. rotante

forza centrifuga

forza Coriolis

Ricaviamo questa Lagrangiana in maniera semplice, usando le proprietà del formalismo Lagrangiano.

In un s.d.r. inerziale, p.to ha coord. x, y, z. e Lagr.

$$L = T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Trasf. di coord. da x, y, z a q_1, q_2, q_3

"$q(\tilde{q}, t)$":

$$x = q_1 \cos\omega t - q_2 \operatorname{sen}\omega t$$
$$y = q_1 \operatorname{sen}\omega t + q_2 \cos\omega t$$
$$z = q_3$$

trasf. di coord. dipendenti dal tempo

$$\tilde{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = L(x(\bar{q}, t), y(\bar{q}, t), z(\bar{q}, t), \dot{x}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), \dots)$$

$$\dot{x} = \dot{q}_1 \cos\omega t - \dot{q}_2 \operatorname{sen}\omega t - q_1 \omega \operatorname{sen}\omega t - q_2 \omega \cos\omega t$$
$$\dot{y} = \dot{q}_1 \operatorname{sen}\omega t + \dot{q}_2 \cos\omega t + q_1 \omega \cos\omega t - q_2 \omega \operatorname{sen}\omega t$$
$$\dot{z} = \dot{q}_3$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)^2 + \dot{y}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)^2 + \dot{z}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)^2 \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)}_{T \text{ in s.d.r. rotante}} + \underbrace{\frac{m\omega^2}{2} (\underbrace{q_1^2 + q_2^2}_{d(\bar{q})^2})}_{-V_c(\bar{q})} +$$

$$+ \underbrace{m\omega (\underbrace{q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1}_{(\bar{q} \times \dot{\bar{q}})_3})} \qquad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$m\bar{\omega} \cdot (\bar{q} \times \dot{\bar{q}}) = -m\bar{\omega} \cdot (\dot{\bar{q}} \times \bar{q}) = -m(\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}}) \cdot \bar{q}$$

$$= -V_1(\bar{q})$$