Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dove A è un insieme aperto. Il nostro obiettivo è calcolare, dato $x^0 \in A$, il limite $\lim_{x\to x^0} f(x)$ mediante opportune restrizioni.

Supponiamo di poter suddividere l'insieme A come segue:

$$A = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_N \tag{1}$$

dove ogni insieme U_k è un intorno di x^0. Consideriamo quindi le restrizioni della funzione f sui sottoinsiemi U_k, ovvero consideriamo

$$f_k : U_k \to \mathbb{R}\,, \qquad f_k(x) = f(x)\,. \tag{2}$$

Supponiamo di essere in grado di calcolare, per ogni $k \in \{1, \ldots, N\}$, il limite

$$\lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f_k(x) = \lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f(x) = \ell_k\,.$$

Se troviamo due elementi $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ tali che $\ell_i \neq \ell_j$ allora il limite $\lim_{x\to x^0} f(x)$ non esiste. Supponiamo quindi che i valori ℓ_k così trovati siano tutti uguali, ovvero

$$\lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f_k(x) = \lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f(x) = \ell\,, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, N\}.$$

Scriviamo quindi la definizione di limite: fissato $k \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_k > 0\ :\ x \in \big(B_{\delta_k}(x^0) \cap U_k\big) \setminus \{x^0\}\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$$

A questo punto, ponendo

$$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\} > 0$$

troviamo

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \forall k\,, x \in \big(B_{\delta}(x^0) \cap U_k\big) \setminus \{x^0\}\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$$

quindi ricordando la scomposizione in (1), concludiamo

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ x \in \big(B_{\delta}(x^0) \cap A\big) \setminus \{x^0\}\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\,,$$

ovvero

$$\lim_{x\to x^0} f(x) = \ell\,.$$

Consideriamo ora una situazione leggermente diversa, ora scomponiamo l'insieme A in un numero infinito di sottinsiemi:

$$A = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} U_k\,, \tag{3}$$

dove l'insieme $\mathcal{K}$ è un insieme infinito di indici (ad esempio possiamo avere $\mathcal{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ a seconda delle situazioni). Anche in questo caso, per ogni $k \in \mathcal{K}$, l'insieme U_k è un intorno di x^0. Consideriamo quindi le restrizioni della funzione f sui sottoinsiemi U_k come in (2) e supponiamo di essere in grado di calcolare, per ogni $k \in \mathcal{K}$, il limite

$$\lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f_k(x) = \lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f(x) = \ell_k\,.$$

Se troviamo due elementi $i, j \in \mathcal{K}$ tali che $\ell_i \neq \ell_j$ allora il limite $\lim_{x\to x^0} f(x)$ non esiste. Supponiamo quindi che i valori ℓ_k così trovati siano tutti uguali, ovvero

$$\lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f_k(x) = \lim_{\substack{x\,\to\,x^0\\ x\,\in\,U_k}} f(x) = \ell\,, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, N\}.$$

Scriviamo quindi la definizione di limite: fissato $k \in \mathcal{K}$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_k > 0\ :\ x \in \big(B_{\delta_k}(x^0) \cap U_k\big) \setminus \{x^0\}\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$$

A questo punto, dobbiamo porre

$$\delta = \inf\{\delta_k \mid k \in \mathcal{K}\} \geq 0 \tag{4}$$

ma potremmo trovare $\delta = 0$, che non ci permetterebbe di ragionare come sopra.

A questo punto vediamo degli esempi applicativi.

Esempio 0.1. *Consideriamo la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ già vista precedentemente:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che f non è continua valendo

$$f(s, as^2) = \frac{a^2}{(1+a^2)^2}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$. Avevamo mostrato che f ha derivate parziali nulle nell'origine e, considerando il versore $\nu = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$, avevamo visto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\nu) - f(0)}{t} \\ &= \cdots = \lim_{t\to 0} t \cdot \frac{\cos^4\theta \sin^2\theta}{(t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta)^2} = 0 \end{aligned}$$

Escludendo gli angoli $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$, il secondo fattore può essere riscritto come

$$\left[\frac{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta \sin\theta}\right]^{-2}$$

e notiamo che, posto $|t| < \delta$ per un δ arbitrariamente piccolo, non è possibile ottenere una limitazione di questa quantità che sia uniforme al variare di θ, ovvero non esiste una costante M tale che

$$\left[\frac{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta \sin\theta}\right]^{-2} \leq M \qquad \text{per ogni } t \in (-\delta, \delta) \text{ e } \theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\},$$

che è equivalente a trovare una costante $\widetilde{M}$ tale che

$$\frac{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta \sin\theta} \geq \widetilde{M} \qquad \text{per ogni } t \in (-\delta, \delta) \text{ e } \theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\},$$

cosa impossibile data la presenza dei denominatori che si vanno ad annullare quando ci avviciniamo agli angoli $\theta \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Quindi non riusciamo a trovare una maggiorazione adeguata per applicare il teorema dei carabinieri.

Possiamo notare che in questo caso possiamo scomporre il dominio di f nel seguente modo

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\theta \in [0,\pi)} R_\theta\,, \qquad \text{dove } R_\theta = \{(x,y) = (t\cos\theta, t\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}\,,$$

ovvero come unione delle rette per l'origine. In questo caso, usando le notazioni precedentemente introdotte, $x^0 = (0,0)$, $\mathcal{K} = [0,\pi)$ è l'insieme infinito e $U_k = R_k$ sono gli intorni dell'origine. In questo caso otteniamo proprio $\delta = 0$ nella formula (4).

Esempio 0.2. *Consideriamo la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} & xy > 0\,, \\ xy & xy \leq 0\,. \end{cases}$$

Rispondiamo alle seguenti domande:

La funzione è continua in $(1,0)$? (per esercizio rivedere il caso di punti $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$ posto che $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ in modo analogo)

La funzione è continua in (0,0)?

Continuità in $(1,0)$*. Procediamo come in* (1) *e scomponiamo* $\mathbb{R}^2$ *nel modo seguente:*

$$R^2 = E_1 \cup E_2 \,, \qquad \begin{aligned} E_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \,, \\ E_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\} \,. \end{aligned}$$

Ai fini della verifica della continuità, in questa parte, considereremo palle centrate in $x^0 = (1,0)$ *e raggio* $R < \frac{1}{2}$*, in modo che non intersechino l'origine. Notiamo quindi che*

$$\begin{aligned} &\text{in } B_R(x^0) \cap E_1 \text{ abbiamo} \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} \,, \\ &\text{in } B_R(x^0) \cap E_2 \text{ abbiamo} \qquad f(x,y) = xy \,. \end{aligned}$$

Un facile calcolo ci porta a verificare che

$$0 = \lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (1,0) \\ (x,y) \in B_R(x^0) \cap E_1}} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (1,0) \\ (x,y) \in B_R(x^0) \cap E_1}} f(x,y) \,.$$

Inoltre

$$0 = \lim_{(x,y) \to (1,0)} xy = \lim_{\substack{(x,y) \to (1,0) \\ (x,y) \in B_R(x^0) \cap E_2}} xy = \lim_{\substack{(x,y) \to (1,0) \\ (x,y) \in B_R(x^0) \cap E_2}} f(x,y) \,.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y) = 0 \,.$$

Continuità in $(0,0)$*. Anche qui procediamo come in* (1) *e scomponiamo* $\mathbb{R}^2$ *nel modo seguente:*

$$R^2 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \qquad \begin{aligned} E_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \,, y > 0\} \,, \\ E_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \,, x \leq 0\} \,. \\ E_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0 \,, y < 0\} \,, \\ E_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \,, x \geq 0\} \,. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} &\text{in } E_1 \cup E_3 \text{ abbiamo} \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} \,, \\ &\text{in } E_2 \cup E_4 \text{ abbiamo} \qquad f(x,y) = xy \,. \end{aligned}$$

Un calcolo già visto a lezione ci porta a verificare che

$$0 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_1}} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_1}} f(x,y) \,.$$

$$0 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_3}} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_3}} f(x,y) \,.$$

Inoltre

$$0 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} xy = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_2}} xy = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_2}} f(x,y) \,.$$

$$0 = \lim_{(x,y) \to (0,0)} xy = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_4}} xy = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E_4}} f(x,y) \,.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 \,.$$