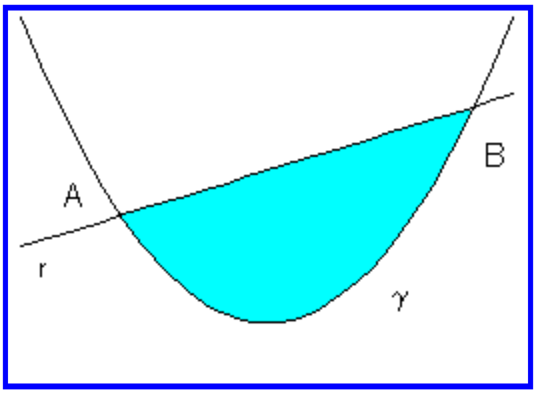
# Area del segmento parabolico

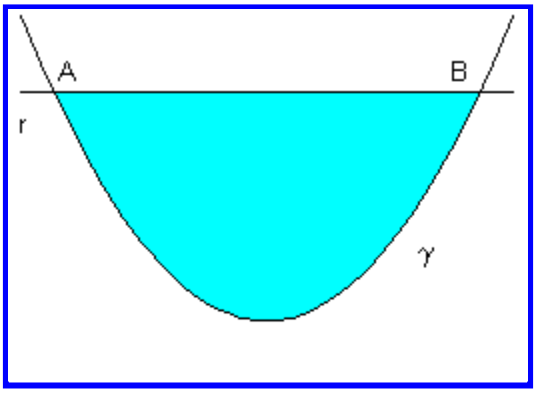
**Appunti per i Licei Scientifici**
(da Note Didattiche)

## 1. Definizione

Dati in un piano una parabola γ e una retta *r* che interseca γ in due punti distinti A e B, la parte finita di piano delimitata dall'arco AB di γ e dal segmento AB di *r* è detta **segmento parabolico**.




In particolare, se la retta *r* è perpendicolare all'asse della parabola γ, il segmento parabolico si dice **retto**.




## 2. Approssimazione dell'area

Per valutare l'area di un segmento parabolico retto si può operare nel seguente modo.

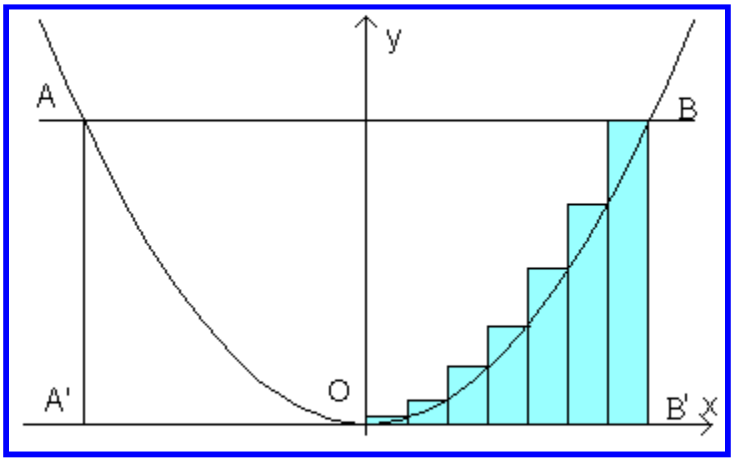
Si sceglie un sistema di riferimento con origine nel vertice di γ e asse delle ordinate coincidente con l'asse della parabola orientato dal vertice al fuoco. In tale sistema l'equazione di γ risulta

$$y = a\,x^2$$

Detta B' la proiezione del punto B sull'asse delle ascisse e *l* la distanza OB', si suddivide OB' in *n* segmenti di ugual misura. Le ascisse degli estremi destri di questi segmenti risulteranno

$$\frac{l}{n}, 2\frac{l}{n}, 3\frac{l}{n}, 4\frac{l}{n}, \ldots, l$$

Si costruiscono quindi i rettangoli aventi come base ognuno di questi segmenti e come altezza l'ordinata corrispondente al loro estremo destro calcolata sulla parabola.




Il rettangolo di ordine *i* ha area

$$r_i = \frac{l}{n} a \left( i \frac{l}{n} \right)^2 = a \frac{l^3}{n^3} i^2$$

La somma R delle aree di tutti i rettangoli risulta

$$R = \sum_{i=1}^{n} a \frac{l^3}{n^3} i^2 = a \frac{l^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

La differenza tra R e l'area S della figura delimitata dai segmenti OB' e B'B e dall'arco OB di γ risulta sempre positiva, ma diventa tanto minore quanto maggiore si prende il numero *n* di segmenti di OB'. Si esprime questa situazione dicendo che **S è il limite di R per n che tende all'infinito** e si può scrivere

$$S = \underset{n \to \infty}{R} = a \frac{l^3}{n^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^2$$

Calcolando il valore della sommatoria, si ottiene quindi l'area S.

## 3. La somma dei quadrati

Per calcolare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali è utile costruire la seguente tabella

| **i** | **$i^2$** | **$\Sigma\, i^2$** | **$6\, \Sigma\, i^2$** | **$6\, \Sigma\, i^2$** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 6 | 1 · 2 · 3 |
| 2 | 4 | 5 | 30 | 2 · 3 · 5 |
| 3 | 9 | 14 | 84 | 3 · 4 · 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 16 | 30 | 180 | 4 · 5 · 9 |
| 5 | 25 | 55 | 330 | 5 · 6 · 11 |

Per induzione, si può concludere che

$$6\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## 4. Il teorema di Archimede

Utilizzando il risultato ottenuto, riprendendo l'espressione di R, si ha

$$R = a\frac{l^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = a\frac{l^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = a\frac{l^3}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{a\,l^3}{6}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} = \frac{a\,l^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Per *n* infinitamente grandi, le frazioni di denominatore *n* si annullano e quindi

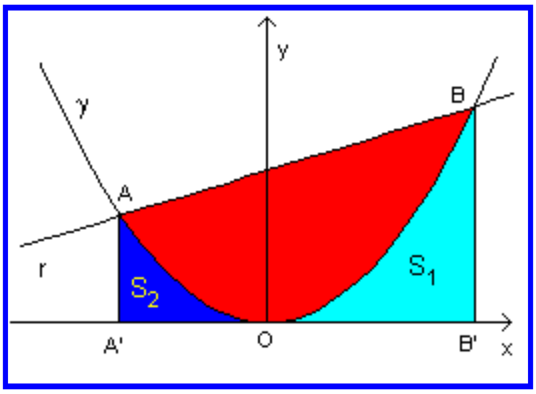
$$S = \lim_{n\to\infty} R = \frac{a\,l^3}{6}2 = \frac{a\,l^3}{3} = \frac{1}{3}l\,al^2 = \frac{1}{3}\overline{OB'}\,\overline{B'B}$$

cioè l'area S è uguale a un terzo dell'area del rettangolo di base OB' e altezza B'B. Conseguentemente l'area della rimanente parte del rettangolo è due terzi dell'area dello stesso.

Per la simmetria della figura si può quindi concludere che **l'area del segmento parabolico retto è due terzi dell'area del rettangolo circoscritto**. Questa proprietà, dimostrata da Archimede di Siracusa, è nota come **teorema di Archimede**.

## 5. Area del segmento parabolico obliquo

Se il segmento parabolico è generato dall'intersezione della parabola *y* di equazione $y=ax^2$ ($a>0$) con la retta *r* obliqua rispetto agli assi cartesiani, detti A e B i punti di intersezione e A' e B' le loro proiezioni sull'asse delle ascisse, l'area del segmento parabolico è ottenibile dalla differenza tra l'area del trapezio ABB'A' e la somma delle aree dei triangoli mistilinei $S_1$ e $S_2$.




Dette $x_A$ e $x_B$ ($x_A$<0<$x_B$) le ascisse di A e B, il segmento A'B' ha misura $\overline{A'B'} = (x_B - x_A)$, il segmento AA' ha misura $\overline{AA'} = a\,x_A^2$ e il segmento BB' ha misura $\overline{BB'} = a\,x_B^2$.

L'area del trapezio ABB'A' è dunque

$$\mathcal{A}(ABB'A') = \frac{1}{2}a\left(x_B^2 + x_A^2\right)\left(x_B - x_A\right)$$

L'area del triangolo mistilineo $S_1$ è un terzo di quella del rettangolo di lati OB' e BB' e l'area del triangolo mistilineo $S_2$ è un terzo di quella del rettangolo di lati OA' e AA', cioè

$$\mathcal{A}(S_1) = \frac{1}{3}x_B\left(a\,x_B^2\right)$$

$$\mathcal{A}(S_2) = -\frac{1}{3}x_A\left(a\,x_A^2\right)$$

L'area del segmento parabolico AOB risulta dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AOB) &= \frac{1}{2}a\left(x_B^2 + x_A^2\right)\left(x_B - x_A\right) - \frac{1}{3}a\,x_B^3 + \frac{1}{3}a\,x_A^3 = \\ &= a\,\frac{3\left(x_B^3 - x_A x_B^2 + x_A^2 x_B - x_A^3\right) - 2\,x_B^3 + 2\,x_A^3}{6} = \\ &= \frac{a}{6}\left(x_B^3 - 3x_A x_B^2 + 3x_A^2 x_B - x_A^3\right) = \\ &= \frac{a}{6}\left(x_B - x_A\right)^3\end{aligned}$$

Questa espressione dell'area del segmento parabolico vale in generale per ogni parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con *a>0*. Infatti, traslando l'origine del sistema di riferimento nel vertice della parabola si riproduce la configurazione studiata.

Ovviamente, se *a* è negativo, va considerato in valore assoluto.

In definitiva, data una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ intersecata da una retta nei punti di ascisse rispettivamente $x_A$ e $x_B$ ($x_A$<$x_B$), il segmento parabolico così determinato ha area

$$\mathcal{A} = \frac{|a|}{6}\left(x_B - x_A\right)^3$$

ultimo aggiornamento: 03/06/2016