CALCOLO DIFFERENZIALE

IN PIÙ VARIABILI

1 Richiami

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, si dice grafico di f l'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \mid y = f(x)\,, x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}\,.$$

Ne consegue che il grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e può essere interpretato come una "superficie" (sotto opportune ipotesi da assegnare alla funzione f). In questo caso useremo la seguente notazione.

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\,, (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

Dapprima vedremo principalmente funzioni del tipo $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove A sarà il dominio della funzione f. Tale lettera è scelta per il semplice fatto che spesso chiederemo che l'insieme A sia aperto.

Definizione 1.1 (Restrizioni)**.** *Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Definiamo le seguenti restrizioni rispetto alle rette $y = y_0$ e $x = x_0$ nel piano.*
Dato l'insieme $A_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in A\}$ sia

$$g_{y_0} : A_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \textit{tale che } g_{y_0}(x) = f(x, y_0)\,. \tag{1}$$

Dato l'insieme $\mathcal{A}_{y_0} = \{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in A\}$ sia

$$h_{x_0} : \mathcal{A}_{y_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \textit{tale che } h_{x_0}(y) = f(x_0, y)\,. \tag{2}$$

Nota 1.2. *Possiamo* interpretare *i grafici delle funzioni g_{y_0} e h_{x_0} come curve contenute nel grafico di f. In realtà, per essere rigorosi, i grafici di g_{y_0} e h_{x_0}, rispettivamente*

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = g_{y_0}(x)\} \quad e \quad \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = h_{x_0}(y)\}\,,$$

sono sottoinsiemi del piano. Dobbiamo definire in realtà i seguenti due insiemi:

$$G_{y_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = g_{y_0}(x)\,, y = y_0\} \subseteq G\,,$$

$$\mathcal{G}_{x_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = h_{x_0}(y)\,, x = x_0\} \subseteq G\,.$$

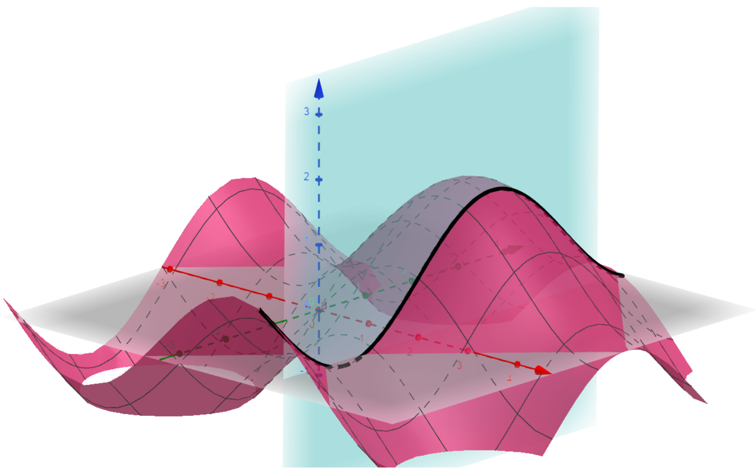

Figura 1: Vedi Definizione 1.1.

2 Funzioni differenziabili

In questa sezione cercheremo di introdurre l'analogo del concetto di derivata visto in Analisi 1. Parlando rudemente, una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile ha un grafico liscio, senza spigoli (e senza rette tangenti verticali). Quale nozione dobbiamo introdurre per generiche funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$? Qui di seguito ci concentreremo dapprima sul caso di funzioni con dominio contenuti nel piano ovvero in caso $N = 2$.

Definizione 2.1 (Derivata parziale)**.** *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto e un punto $(x_0, y_0) \in A$.*
Diremo che f ammette derivata parziale rispetto alla variabile x in (x_0, y_0) se la funzione g_{y_0} definita in (1) *risulta derivabile in x_0, ovvero se esiste finito il seguente limite:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := g'_{y_0}(x_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{g_{y_0}(x_0 + t) - g_{y_0}(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}\,.\end{aligned}$$

Diremo che f ammette derivata parziale rispetto alla variabile y in (x_0, y_0) se la funzione h_{x_0} definita in (2) *risulta derivabile in y_0, ovvero se esiste finito il seguente limite:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := h'_{x_0}(y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{h_{x_0}(y_0 + t) - h_{x_0}(y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 2.2. *Verificare le seguenti affermazioni usando la definizione di derivata parziale:*

- *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = x$ ammette derivate parziali per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e valgono*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,.$$
- *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = \sin(xy)$ ammette derivate parziali per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e valgono*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \cos(x_0 y_0) y_0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \cos(x_0 y_0) x_0\,.$$
- *La funzione $f : (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = \log(1 + x)e^y$ ammette derivate parziali per ogni (x_0, y_0) del dominio e valgono*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{e^{y_0}}{1 + x_0}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \log(1 + x_0)e^{y_0}\,.$$

Risolvendo il precedente esercizio si nota come, facendo la derivata parziale rispetto ad una variabile, l'altra variabile *presenzia ai calcoli fingendosi un parametro* ed è possibile utilizzare le proprietà note per il calcolo delle derivate per funzioni reali di variabile reale.

Definizione 2.3 (Notazioni)**.** *Le derivate parziali per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ solitamente si denotano con*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ oppure } f_x\,, f_y\,, f_z \text{ oppure } D_x f\,, D_y f\,, D_z f\,.$$

Le derivate parziali per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ solitamente si denotano con

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} &\text{ oppure } f_{x_1}\,, f_{x_2}\,, \dots, f_{x_N} \\ &\text{ oppure } D_{x_1} f\,, D_{x_2} f\,, \dots, D_{x_N} f\,.\end{aligned}$$

In questo corso preferiremo usare il primo tipo di notazioni.

Definizione 2.4. *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto e un punto $(x_0, y_0) \in A$. Sia $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\|\nu\| = 1$, detto versore (o direzione).*
Diremo che f ammette derivata direzionale di versore (o direzione) ν in (x_0, y_0) se esiste finito il seguente limite:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Osservazione 2.5. *Se poniamo $\nu = e_1 = (1, 0)$ troviamo la derivata parziale rispetto alla variabile x, mentre se poniamo $\nu = e_2 = (0, 1)$ troviamo la derivata parziale rispetto alla variabile y.*

Si noti che nelle definizioni precedenti le derivate parziali e direzionali sono numeri reali. Proponiamo ora la definizione di derivata parziale e direzionale per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$.

Definizione 2.6. *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto e un punto $x^0 \in A$.*
Diremo che f ammette derivata parziale rispetto alla variabile x_i in x^0 se esiste il seguente limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t} \in \mathbb{R}^M.$$

dove e_i è il vettore i-esimo della base canonica.

Definizione 2.7. *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto e un punto $x^0 \in A$. Sia $\nu \in \mathbb{R}^N$ tale che $\|\nu\| = 1$, detto versore (o direzione).*
Diremo che f ammette derivata direzionale di versore (o direzione) ν in x^0 se esiste il seguente limite:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t\nu) - f(x^0)}{t} \in \mathbb{R}^M.$$

Proposizione 2.8. *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto, un punto $x^0 \in A$ e un versore $\nu \in \mathbb{R}^N$. Supponiamo che f ammetta derivata direzionale di direzione ν in x^0. Se $w \in \mathbb{R}^N$ è tale che $w = \lambda\nu$ allora la funzione $g(t) = f(x^0 + tw)$ è derivabile in zero e vale*

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tw) - f(x^0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t\lambda\nu) - f(x^0)}{t\lambda}\lambda \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x^0 + s\nu) - f(x^0)}{s}\lambda = \lambda\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0). \end{aligned}$$

Come caso particolare troviamo che per $\lambda = -1$ vale

$$\frac{\partial f}{\partial(-\nu)}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0).$$

Osservazione 2.9. *Se poniamo $\nu = e_i$ troviamo la derivata parziale rispetto alla variabile x_i.*

Risulta quindi ovvio che se una funzione ammette tutte le derivate direzionali allora ammette tutte le derivate parziali. Purtroppo l'esistenza delle derivate direzionali non è sufficiente a garantire la continuità di una funzione.

Esempio 2.10. *Consideriamo la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (è il quadrato di una funzione già vista nella sezione "spazi metrici e funzioni continue"):*

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Per esercizio, verificare che le derivate direzionali sono nulle nell'origine. Consideriamo ora il versore $\nu = (\cos\theta, \sin\theta)$ *con* $\theta \in [0, 2\pi)$. *Possiamo calcolare*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\nu)-f(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^6\cos^4\theta\sin^2\theta}{t^4(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)^2} \\ &= \lim_{t\to 0} t\cdot \frac{\cos^4\theta\sin^2\theta}{(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)^2} = 0\end{aligned}$$

dove il termine nell'ultima frazione è limitato una volta fissato θ. *Ne consegue che ogni derivata direzionale esiste ed è nulla nell'origine. Tuttavia questo non basta a garantire la continuità di* f. *Infatti* f *non è continua valendo*

$$f(s, as^2) = \frac{a^2}{(1+a^2)^2}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *In particolare la restrizione di* f *sulla parabola* $y = x^2$ *è la funzione costante* $\frac{1}{4}$ *e quindi esistono infiniti punti in un intorno dell'origine che assumono valori distanti da zero.*

Definizione 2.11. *Sia data una funzione* $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ *con* A *aperto e un punto* $x^0 \in A$. *Diremo che* f *è differenziabile in* x^0 *se esiste un'applicazione lineare* $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ *tale che*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^N}} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)-L[h]}{\|h\|} = 0 \in \mathbb{R}^M\,. \tag{3}$$

L'applicazione L *si dice differenziale di* f *n* x^0.

Nella precedente definizione abbiamo scritto $L[h]$ con le parentesi quadre, invece che $L(h)$ con le parentesi tonde perché altrimenti in quanto segue ci sarebbero state alcune difficoltà nelle notazioni.

Osservazione 2.12. *Nel caso particolare di funzioni reali di variabile reale la definizione si scrive come segue. Sia data una funzione* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in (a, b)$. *La funzione* g *è differenziabile in* x_0 *se esiste* $m \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)-mh}{|h|} = 0. \tag{4}$$

Infatti ricordiamo che le applicazioni lineari $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sono tutte del tipo* $L(h) = mh$ *con* $m \in \mathbb{R}$. *In questo caso abbiamo che* g *è differenziabile in* $x_0 \in (a, b)$ *se e solo se* g *è derivabile in* x_0 *e vale* $m = g'(x_0)$. *In questa particolare situazione, non c'è differenza tra derivabilità e differenziabilità di una funzione. Come vedremo in quanto segue tale equivalenza non vale per funzioni* $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$.

Osservazione 2.13. *Il limite* (3) *può essere sostituito dalle seguenti formulazioni equivalenti:*

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\mathbb{R}^N}} \frac{f(x)-f(x^0)-L[x-x^0]}{\|x-x^0\|} = 0 \in \mathbb{R}^M\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\mathbb{R}^N}} \frac{\|f(x)-f(x^0)-L[x-x^0]\|}{\|x-x^0\|} = 0 \in \mathbb{R}\,,$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^N}} \frac{\|f(x^0+h)-f(x^0)-L[h]\|}{\|h\|} = 0 \in \mathbb{R}\,.$$

Inoltre possiamo scrivere

$$f(x) = f(x^0) + L[x-x^0] + R(x)\,,$$

dove R è tale che

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \mathbb{R}^N}} \frac{R(x)}{\|x - x^0\|} = 0\,. \tag{5}$$

Proposizione 2.14. *Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto e un punto $x^0 \in A$. La funzione f è differenziabile in x^0 se e solo se tutte le componenti $f_k : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sono differenziabili in x^0. Inoltre vale*

$$L = (L_1\,, L_2\,, \ldots\,, L_M)\,.$$

Da qui in avanti non specificheremo più nei limiti in quale spazio varia l'incognita e scriveremo semplicemente

$$\lim_{h \to 0} \text{ invece di } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^N}}\,.$$

Teorema 2.15. *Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto. Se la funzione f è differenziabile in un punto $x^0 \in A$ allora la funzione è continua in x^0.*

Dimostrazione. Usando l'ultima scrittura nell'Osservazione 2.13 abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x^0} f(x) - f(x^0) &= \lim_{x \to x^0} L[x - x^0] + R(x) \\ &= \lim_{x \to x^0} \big(L[x] - L[x^0]\big) + \frac{R(x)}{\|x - x^0\|}\|x - x^0\| = 0\,, \end{aligned}$$

dove il primo addendo va a zero essendo L una funzione continua (in quanto è un'applicazione lineare), mentre il secondo addendo risulta il prodotto di due termini che tendono a zero. □

Proposizione 2.16. *Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto, tale che f è differenziabile in $x^0 \in A$ con differenziale L. Allora per ogni versore $\nu \in \mathbb{R}^N$, $\|\nu\| = 1$, esiste la derivata direzionale di direzione ν e vale*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) = L[\nu]\,.$$

Dimostrazione. I seguenti passaggi portano alla tesi:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t\nu) - f(x^0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{L[t\nu] + R(x^0 + t\nu)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} L[\nu] + \frac{R(x^0 + t\nu)}{t} \\ &= L[\nu] + \lim_{t \to 0} \frac{R(x^0 + t\nu)}{\|t\nu\|} \cdot \frac{\|t\nu\|}{t} \\ &= L[\nu] \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (5) e il fatto che la seconda frazione presenta un termine limitato. □

La proposizione precedente ci permette di determinare come agisce l'applicazione lineare sulla base canonica di $\mathbb{R}^N$, quindi per il teorema di determinazione di un'applicazione lineare su una base abbiamo come diretta conseguenza il seguente corollario.

Corollario 2.17. *Il differenziale L, se esiste, è unico.*

L'unicità del differenziale ci permette di introdurre una notazione più comoda. Da ora in avanti denoteremo con

$$L = Df(x^0)$$

il differenziale della funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ in un punto $x^0 \in A$.

Proposizione 2.18 (Linearità). *Date due funzione $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto. Se le funzioni f e g sono entrambe differenziabili in un punto $x^0 \in A$ con differenziali $Df(x^0)$ e $Dg(x^0)$, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la funzione $\lambda f + \mu g$ è differenziabile in x^0 e vale*

$$D(\lambda f + \mu g)(x^0) = \lambda Df(x^0) + \mu Dg(x^0)\,.$$

Dimostrazione. I seguenti passaggi portano alla tesi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(\lambda f+\mu g)(x^0+h)-(\lambda f+\mu g)(x^0)-\big(\lambda Df(x^0)+\mu Dg(x^0)\big)[h]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\big(\lambda f(x^0+h)+\mu g(x^0+h)-\lambda f(x^0)-\mu g(x^0) \\
&\qquad\qquad\qquad -\lambda Df(x^0)[h]-\mu Dg(x^0)[h]\big) \\
&= \lim_{h\to 0}\ \lambda\ \frac{f(x^0+h)-f(x^0)-Df(x^0)[h]}{h} \\
&\qquad\qquad\qquad +\ \mu\ \frac{g(x^0+h)-g(x^0)-Dg(x^0)[h]}{h} = 0\,.
\end{aligned}$$

□

Definizione 2.19. *Diremo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, con A aperto, è differenziabile in A se è differenziabile in x^0 per ogni $x^0 \in A$.*

Esempio 2.20. *La funzione costante $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, dove $f(x) = c \in \mathbb{R}^M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ è differenziabile in $\mathbb{R}^N$ e ha come differenziale l'applicazione nulla ($L[h] = 0 \in \mathbb{R}^M$ per ogni $h \in \mathbb{R}^N$). Infatti in questo caso il numeratore in* (3) *diventa semplicemente*

$$f(x^0+h)-f(x^0)-L[h] = c-c-0 = 0\,.$$

Se la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è un'applicazione lineare allora essa è differenziabile in $\mathbb{R}^N$ e ha come differenziale l'applicazione f stessa. Anche in questo caso il numeratore in (3) *è molto semplice*

$$f(x^0+h)-f(x^0)-L[h] = f(x^0+h)-f(x^0)-f(h) = 0\,.$$

Dal corso di geometria è noto che un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ si può identificare con una matrice $\mathcal{M}$ avente M righe e N colonne, nel senso che possiamo scrivere

$$L[h] = \mathcal{M}h \tag{6}$$

dove nel membro destro dobbiamo calcolare un prodotto riga per colonna.

Quindi, se abbiamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, con A aperto, differenziabile in x^0 con differenziale $Df(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ allora ad esso è associata una matrice avente M righe e N colonne. La chiameremo **matrice Jacobiana** di f in x^0 e la denoteremo con $Jf(x^0)$. L'identità (6) diventa quindi

$$Df(x^0)[h] = Jf(x^0)h\,.$$

Vogliamo a questo punto capire quali sono le celle che formano la matrice Jacobiana. La Proposizione 2.14 ci suggerisce di risolvere prima il problema sulle componenti. Consideriamo quindi una funzione $g : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ che sia differenziabile in $x^0 \in A$ con differenziale $Dg(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Il differenziale è un elemento del duale di $\mathbb{R}^N$.

Ricordiamo che possiamo rappresentare ogni applicazione lineare $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (elemento del duale di $\mathbb{R}^N$) con un vettore v di $\mathbb{R}^N$ e scrivere l'identità

$$T[w] = \langle v\,,\, w\rangle = v^t\ w\,, \tag{7}$$

dove compaiono un prodotto scalare e il prodotto riga per colonna del vettore riga trasposto di v con il vettore colonna w.

Chiameremo quindi **vettore gradiente** di g in x^0, e lo denoteremo con $\nabla g(x^0)$, il vettore che rappresenta il differenziale $Dg(x^0)$. Avremo quindi

$$Dg(x^0)[h] = \big\langle \nabla g(x^0)\,,\, h\big\rangle = \nabla g(x^0)^t\ h\,.$$

Applicando la Proposizione 2.16 alla funzione g usando i vettori e_k della base canonica troviamo

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x^0) = \frac{\partial g}{\partial e_k}(x^0) = Dg(x^0)[e_k] = \big\langle \nabla g(x^0)\,,\, e_k\big\rangle = \nabla g(x^0)_k$$

e concludiamo che la componente k-esima del gradiente è la derivata parziale rispetto alla k-esima variabile, quindi possiamo scrivere:

$$\nabla g(x^0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x^0)\,,\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x^0)\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial g}{\partial x_N}(x^0)\right)\,.$$

Torniamo ora al caso più generale di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, con A aperto, differenziabile in x^0 con differenziale $Df(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ al fine di individuare la sua matrice Jacobiana avente M righe e N colonne.

Usando la Proposizione 2.16 troviamo la colonna k-esima della matrice

$$Jf(x^0)e_k = Df(x^0)[e_k] = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_k}(x^0) \end{pmatrix}$$

Quindi

$$Jf(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x^0) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x^0) \end{pmatrix}$$

Inoltre, dalla Proposizione 2.14 abbiamo che le componenti $f_k : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sono differenziabili in x^0 con differenziale $Df_k(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e che il differenziale $Df(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ ha come componenti i differenziali $Df_k(x^0)$, con $k = 1, \ldots, M$. Notiamo che $Df_k(x^0)$ è un elemento del duale di $\mathbb{R}^N$. quindi, esso è rappresentato dal gradiente $\nabla f_k(x^0)$.

La matrice $Jf(x^0)$ è formata da questi gradienti, abbiamo:

$$Jf(x^0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x^0) \\ \\ \nabla f_2(x^0) \\ \vdots \\ \nabla f_M(x^0)\,. \end{pmatrix}\,.$$

Osservazione 2.21. *L'esistenza delle derivate parziali non implica la differenziabilità di una funzione. Nell'Esempio 2.10 abbiamo visto il caso di una funzione non continua nell'origine, avente tutte le derivate parziali nulle nell'origine. Questa funzione non è quindi differenziabile nell'origine, come conseguenza del Teorema 2.15.*

Esempio 2.22. *Proviamo che la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

Innanzitutto notiamo che $f(x,0) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e che* $f(0,y) = 0$ *per ogni* $y \in \mathbb{R}$. *Quindi*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Ne consegue che essa ha gradiente nullo:

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)\,.$$

Quindi per ogni $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ avremo

$$Df(0,0)[h] = \langle \nabla f(0,0)\,,\, h \rangle = \langle (0,0)\,,\,(h_1,h_2) \rangle = 0\,.$$

Verifichiamo la validità di (3) per la funzione f in $(0,0)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - Df(0,0)[(h_1,h_2)]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = 0\,.
\end{aligned}$$

Per provare che questo limite tende a zero usiamo le maggiorazioni $h_1^2 \le h_1^2 + h_2^2$ e $h_2^2 \le h_1^2 + h_2^2$ unitamente al teorema dei carabinieri applicato a queste stime:

$$0 \le \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \le \frac{(h_1^2+h_2^2)^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = (h_1^2+h_2^2)^{1/2} \xrightarrow{h\to 0} 0\,.$$

Proposizione 2.23 (Approssimante lineare)**.** *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto, e $x^0 \in A$. Allora f è differenziabile in x^0 se e solo se esiste un'applicazione affine $P_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $P_1(x) = L[x] + y^0$ tale che $f(x^0) = P_1(x^0)$ e*

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - x^0\|} = 0\,. \tag{8}$$

L'applicazione P_1 è detta **approssimante lineare** *di f in x^0.*

Dimostrazione. "⇒" Poiché f è differenziabile in x^0 allora

$$f(x) = f(x^0) + Df(x^0)[x - x^0] + R(x) = f(x^0) + Df(x^0)[x] - Df(x^0)[x^0] + R(x)\,.$$

Se poniamo $y^0 = f(x^0) - Df(x^0)[x^0]$ e $L = Df(x^0)$ troviamo

$$P_1(x) = L[x] + y^0 = Df(x^0)[x] + (f(x^0) - Df(x^0)[x^0])$$

da cui segue facilmente che $P_1(x^0) = f(x^0)$ e la condizione (8) segue usando la (5).

"⇐" Dalla definizione di P_1 segue

$$P_1(x) = L[x] + y^0 = L[x - x^0] + y^0 + L[x^0]\,,$$

quindi dall'ipotesi che $P_1(x^0) = f(x^0)$ segue $f(x^0) = y^0 + L[x^0]$. Verifichiamo quindi la validità del limite (3) usando l'applicazione lineare L che definisce P_1 e la (8):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - L[x - x^0]}{\|x - x^0\|} \\
&= \lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - y^0 - L[x^0] - L[x] + L[x^0]}{\|x - x^0\|} \\
&= \lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - y^0 - L[x]}{\|x - x^0\|} \\
&= \lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - x^0\|} = 0\,.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.24. *Come si evince dalla dimostrazione precedente vale*

$$P_1(x) = f(x^0) + Df(x^0)[x - x^0]\,.$$

Definizione 2.25. *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto, differenziabile in $x^0 \in A$. Il grafico dell'approssimante lineare è*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \mid y = f(x^0) + Df(x^0)[x - x^0]\,, x \in \mathbb{R}^N\}\,.$$

Tale insieme viene detto sottospazio affine tangente al grafico di f nel punto $P^0 = (x^0, f(x^0))$ *passante per il punto P^0. Ricordando che ogni sottospazio affine può essere scritto come $T = P_0 + S$ dove S è il sottospazio vettoriale di giacitura, diremo che S è il* sottospazio vettoriale tangente al grafico di f nel punto P^0*. Spesso si denota con $S = T_f(P^0)$.*

Osservazione 2.26. *Nel caso $N = M = 1$ siamo nel caso noto della retta tangente al grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In questo caso l'approssimante lineare è data da $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.*

Osservazione 2.27. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto, differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$. Allora l'approssimante lineare è data da*

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ (y - y_0) \qquad (9)\\ &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0)\,,\, (x - x_0\,,\, y - y_0)\rangle\ . \end{aligned}$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, differenziabile in $(x^0) \in A$. Allora l'approssimante lineare è data da

$$\begin{aligned} y &= f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\ (x_1 - x_1^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)\ (x_N - x_N^0)\\ &= f(x^0) + \left\langle \nabla f(x^0)\,,\, x - x^0 \right\rangle\ . \end{aligned}$$

Esempio 2.28. *Calcoliamo l'approssimante lineare della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = e^{xy} + \sin x$ nel punto $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$. In questo caso si parla di* piano tangente al grafico di f nel punto (x_0, y_0) *passante per (x_0, y_0). Dopo aver calcolato $f(\pi, 1) = e^\pi$, calcoliamo il gradiente di f in un generico punto del dominio:*

$$\nabla f(x, y) = \left(y\, e^{xy} + \cos x\,,\, x\, e^{xy}\right).$$

Quindi troviamo $\nabla f(\pi, 1) = (e^\pi - 1, \pi\, e^\pi)$. Usando la formula (9) troviamo

$$\begin{aligned} z &= e^\pi + \left(e^\pi - 1\right)(x - \pi) + (\pi\, e^\pi)(y - 1)\\ &= (e^\pi - 1)x + \pi\, e^\pi y + [e^\pi(1 - 2\pi) + \pi]\,. \end{aligned}$$

Il prossimo teorema ci dà una condizione sufficiente per garantire la differenziabilità di una funzione in un punto.

Teorema 2.29 (Teorema del differenziale totale)**.** *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto e $x^0 \in A$ Se f ammette derivate parziali rispetto a tutte le variabili in un intorno di x^0 e queste sono tutte continue in x^0 allora f è differenziabile in x^0.*

Dimostrazione. Si può dimostrare il teorema ragionando sulle componenti f_k grazie alla Proposizione 2.14, quindi senza perdere in generalità si può porre $M = 1$. Invece, porremo per semplicità $N = 2$ e considereremo un punto $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Dalle ipotesi abbiamo che esiste in un intorno U di (x_0, y_0) il gradiente di f

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,,\, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

e questo è continuo in (x_0, y_0) come funzione $\nabla f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. L'obiettivo è dimostrare il seguente limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ k\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0\,. \qquad (10)$$

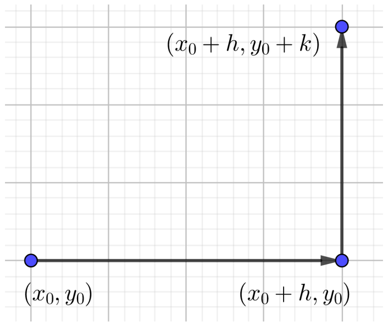

Figura 2: vedi Teorema 10.

Assumiamo sia $h > 0$ e $k > 0$ per semplicità.[1] Consideriamo i due segmenti del piano che collegano (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0)$ – il primo – e $(x_0 + h, y_0)$ a $(x_0 + h, y_0 + k)$ – il secondo –.

Scriviamo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

e consideriamo separatamente i due addendi. Usando le restrizioni introdotte nella Definizione 1.1 troviamo

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) &= h_{x_0+h}(y_0 + k) - h_{x_0+h}(y_0) \\ &= h'_{x_0+h}(y_0 + \eta)\ k \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \eta)\ k\,, \quad \eta \in (0, k) \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di Lagrange alla funzione derivabile h_{x_0+h}; analogamente

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) &= g_{y_0}(x_0 + h) - g_{y_0}(x_0) \\ &= g'_{y_0}(x_0 + \xi)\ h \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0)\ h\,, \quad \xi \in (0, h) \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di Lagrange alla funzione derivabile g_{y_0}. Il numeratore del rapporto in (10) diventa quindi

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \eta)\ k + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0)\ h - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ k\right| \\ &\le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \cdot |h| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \cdot |k| \end{aligned}$$

dove $\xi \in (0, h)$ e $\eta \in (0, k)$. Poiché

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le 1\,, \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le 1\,,$$

abbiamo che l'argomento non negativo del limite in (10) può essere maggiorato con

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|\,.$$

Passando al limite $(h, k) \to (0, 0)$, ricordando che $\xi \in (0, h)$ e $\eta \in (0, k)$, possiamo sfruttare la continuità delle derivate parziali in (x_0, y_0) e ottenere

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| = 0\,.$$

Abbiamo quindi maggiorato il termine nel limite in (10) con un termine che va a zero per $(h, k) \to (0, 0)$, quindi la tesi segue dal teorema dei carabinieri. □

[1] Per esercizio, riscrivere la dimostrazione nel caso $h < 0$ e $k < 0$ e verificare che i cambiamenti risiedono solo nelle notazioni.

Si consiglia di provare a riscrivere la precedente dimostrazione nel caso $N = 3$ e quindi per un N generico.

Definizione 2.30. *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto. Essa si dice di classe C^1 in A se esistono tutte le derivate parziali in A e queste sono tutte continue in A. Con tale affermazione chiediamo che per ogni $k = 1, \ldots, N$ la funzione*

$$\frac{\partial f}{\partial k} : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \,, \quad \text{tale che } x_0 \mapsto \frac{\partial f}{\partial k}(x_0)$$

sia continua per ogni $x^0 \in A$.

Osservazione 2.31. *Se f è di classe C^1 in A allora f è differenziabile in A, quindi f è continua in A.*

Esercizio 2.32. *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$ ma non è differenziabile in $x = 0$. Analogamente la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $g(x, y) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}^2$ ma non è differenziabile nei punti (x_0, y_0) con $x_0 = 0$.*

La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è differenziabile in $x = 0$ ma non è di classe C^1 in un intorno di zero. Analogamente la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $G(x, y) = F(x)$ è differenziabile in $(0, 0)$ ma non è di classe C^1 in un intorno di $(0, 0)$.

3 Teorema di Lagrange

Teorema 3.1 (Differenziale della funzione composta)**.** *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto e $g : B \subseteq \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L$ con B aperto. Supponiamo siano componibili, ovvero che $f(A) \subseteq B$. Consideriamo $x^0 \in A$ e $y^0 = f(x^0) \in B$ e supponiamo che f sia differenziabile in x^0 con differenziale $Df(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e che g sia differenziabile in y^0 con differenziale $Dg(y^0) : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L$.*

Allora la funzione composta $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^L$ è differenziabile in x^0 e il suo differenziale $D(g \circ f)(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^L$ risulta la composizione dei due differenziali:

$$D(g \circ f)(x^0) = Dg(f(x^0)) \circ Df(x^0) \,.$$

La dimostrazione di questo teorema è omessa e non sarà chiesta all'orale. Riferimenti bibliografici: Bramanti Pagani Salsa, Capitolo 4.2, pagg. 209 ss.; Giusti, Capitolo 11.4, pagg. 16 ss.; Fusco Marcellini Sbordone, Capitolo 3.30, pagg. 141 ss.

Se andiamo a vedere come si scrive la matrice Jacobiana associata troviamo

$$J(g \circ f)(x^0) = Jg(f(x^0)) \cdot Jf(x^0)$$

dove l'operazione da fare è il prodotto riga per colonna fra matrici.

Confrontiamo la formula precedente con la formula data dal teorema della derivata della composizione di due funzioni:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

dove qui abbiamo il prodotto su $\mathbb{R}$, che altro non è che il prodotto riga per colonna di matrici 1×1.

Esempio 3.2. *Consieriamo le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad f(t) = (\cos t \,,\, \sin t \,,\, t) \,,$$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,, \qquad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \,.$$

Definiamo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $g = F \circ f$. Possiamo calcolare esplicitamente

$$\begin{aligned} g(t) &= F(f(t)) = F(f_1(t) \,,\, f_2(t) \,,\, f_3(t)) \\ &= F(\cos t \,,\, \sin t \,,\, t) \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2 \,, \end{aligned}$$

la cui derivata è $g'(t) = 2t$. Proviamo ora a calcolarla mediante il teorema precedente (naturalmente in questo caso facile ci troviamo ad interpretare la derivata di g come una matrice Jacobiana 1×1, la derivata (vettoriale) di f come una matrice Jacobiana 3×1 e il gradiente di F come una matrice Jacobiana 1×3). Innanzitutto calcoliamo

$$Jf(t) = f'(t) = (-\sin t\,,\,\cos t\,,\,1)^T\,, \qquad \nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)\,,$$

da cui calcoliamo anche

$$JF(f(t)) = \nabla F(f(t)) = \nabla F(\cos t\,,\,\sin t\,,\,t) = (2\cos t\,,\,2\sin t\,,\,2t)$$

Quindi

$$\begin{aligned} g'(t) &= Jg(t) = J(F\circ f)(t) = JF(f(t))\cdot Jf(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t & 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -2\sin t\cos t + 2\sin t \cos t + 2t = 2t\,. \end{aligned}$$

Esempio 3.3. *Calcoliamo il differenziale delle funzioni $H = G\circ F$ e $K = F \circ G$ dove*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad F(x,y) = (x^2+y^2\,,\,x-y\,,\,xy)\,,$$

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad G(x,y,z) = (x+y+z\,,\,y)\,.$$

Calcoliamo la matrici Jacobiane delle due funzioni in generici punti del dominio.

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad JG(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo calcolare le matrici Jacobiane di H e K.

$$\begin{aligned} JH(x,y) &= JG(F(x,y))\cdot JF(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+1+y & 2y-1+x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nel prossimo calcolo si noti che dobbiamo valutar la matrice Jacobiana di F nel punto $G(x,y,z)$

$$\begin{aligned} JK(x,y,z) &= JF(G(x,y,z))\cdot JG(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y+z) & 2(y) \\ 1 & -1 \\ (y) & (x+y+z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+2y+2z & 2x+4y+2z & 2x+2y+2z \\ 1 & 0 & 1 \\ y & x+2y+z & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per esercizio, verificare il risultato calcolando esplicitamente prima le formule che definiscono H e K e poi le loro matrici Jacobiane.

In quanto segue troveremo la formulazione in più variabili del teorema di Lagrange noto per funzioni reali di variabile reali.

Definizione 3.4 (Segmenti e poligonali)**.** *Dati $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^N$ definiamo il segmento chiuso di estremi x^0 e x^1 l'insieme*

$$[x^0, x^1] = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = x^0 + t(x^1 - x^0)\,, t\in[0,1]\}$$

e il segmento aperto di estremi x^0 e x^1 l'insieme

$$(x^0, x^1) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = x^0 + t(x^1 - x^0)\,, t \in (0,1)\}\,.$$

Definiremo poligonale (o spezzata) di vertici $x^0, x^1, \ldots, x^n$ l'unione dei segmenti

$$P = [x^0, x^1] \cup [x^1, x^2] \cup \cdots \cup [x^{n-1}, x^n]\,.$$

Teorema 3.5 (Teorema del valor medio di Lagrange)**.** *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto. Siano $x^0, x^1 \in A$ tali che $x^0 \neq x^1$ e $[x^0, x^1] \subset A$. Sia $\nu = \frac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|}$ il versore direzione individuato dal segmento.*

Supponiamo che f sia continua in $[x^0, x^1]$ e che f ammetta derivata direzionale di versore ν su (x^0, x^1), allora esiste un punto $\xi \in (x^0, x^1)$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(\xi) = \frac{f(x^1) - f(x^0)}{\|x^1 - x^0\|}\,.$$

Dimostrazione. Definisco la funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(t) = f(x^0 + t(x^1 - x^0)) = f(x^0 + t\nu\|x^1 - x^0\|)\,.$$

Essa è continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$ con derivata (usando la Proposizione 2.8)

$$g'(t) = \|x^1 - x^0\|\,\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0 + t\nu\|x^1 - x^0\|)\,, \qquad \forall t \in (0,1)\,,$$

Usando il teorema di Lagrange sulla funzione g abbiamo l'esistenza di un valore $\tau \in (0,1)$ tale che

$$g'(\tau) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}\,,$$

che equivale all'identità

$$\|x^1 - x^0\|\,\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0 + \tau\nu\|x^1 - x^0\|) = f(x^1) - f(x^0)\,.$$

Quindi ponendo $\xi = x^0 + \tau(x^1 - x^0)$ troviamo la tesi facilmente:

$$\|x^1 - x^0\|\,\frac{\partial f}{\partial \nu}(\xi) = f(x^1) - f(x^0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \nu}(\xi) = \frac{f(x^1) - f(x^0)}{\|x^1 - x^0\|}\,.$$

□

Come dal teorema di Lagrange per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ segue che una funzione avente derivata nulla su un intervallo è necessariamente costante su quell'intervallo, così abbiamo il seguente corollario del precedente teorema.

Corollario 3.6. *Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con $B = B_r(x^0)$ la palla euclidea centrata in x^0 e raggio r. Supponiamo che per ogni $x \in B$ vale $Jf(x) = 0$ (e in particolare è di classe C^1) allora la funzione f è costante.*

Dimostrazione. Supponiamo $M = 1$ (possiamo infatti ragionare per componenti). Consideriamo quindi $f : B \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in B$. Allora dalla Proposizione 2.16 segue che per ogni direzione $\nu \in \mathbb{R}^N$, $\|\nu\| = 1$ e per ogni $x \in B$ vale $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = 0$.

Quindi, per ogni $x^1, x^2 \in B$, abbiamo che $[x^1, x^2] \subset B$: infatti per ogni $t \in [0,1]$, definito $\tilde{x} = x^1 + t(x^2 - x^1)$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x} - x^0\| &= \|x^1 + t(x^2 - x^1) - x^0\| \\
&= \|t(x^2 - x^0) + (1-t)(x^1 - x^0)\| \\
&\leq t\,\|x^2 - x^0\| + (1-t)\|x^1 - x^0\| \\
&< tr + (1-t)r = r\,.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare il teorema del valor medio e trovare l'esistenza di un $\xi \in (x^1, x^2)$ tale che

$$f(x^2) - f(x^1) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(\xi)\|x^2 - x^1\| = 0 \cdot \|x^2 - x^1\| = 0\,.$$

Quindi abbiamo che $f(x^2) = f(x^1)$ per ogni $x^1, x^2 \in B$ e quindi la tesi. □

Il precedente corollario può essere esteso a insiemi A che siano aperti connessi. Ricordiamo che un insieme A non è connesso se presenta una *sconnessione*, ovvero se esistono due aperti di A non vuoti, A_1 e A_2, tali che $A_1 \cup A_2 = A$ e $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Corollario 3.7. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto connesso. Se per ogni $x \in A$ vale $Jf(x) = 0$, allora la funzione f è costante.*

Dimostrazione. Essendo A un aperto posso trovare per ogni $x \in A$ un raggio $r(x)$ tale che $B_{r(x)}(x) \subset A$. Quindi abbiamo

$$A = \bigcup_{x \in A} B_{r(x)}(x)\,. \tag{11}$$

Supponiamo che esistano $x^1 \neq x^2$ tali che $f(x^1) \neq f(x^2)$. Definiamo

$$E_1 = \{x \in A \mid f(x) = f(x^1)\} \ni x^1\,,$$
$$E_2 = \{x \in A \mid f(x) \neq f(x^1)\} \ni x^2\,.$$

Osserviamo che $E_1 \cup E_2 = A$. Quindi la (11) può essere riscritta come

$$A = \underbrace{\bigcup_{x \in E_1} B_{r(x)}(x)}_{A_1} \cup \underbrace{\bigcup_{x \in E_2} B_{r(x)}(x)}_{A_2}\,.$$

Notiamo che $E_1 \subseteq A_1$ e $E_2 \subseteq A_2$, quindi $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \neq \varnothing$ e $A_2 \neq \varnothing$. Se $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ allora concluderemmo che A non è connesso in contraddizione con le ipotesi. Quindi deve esistere $x^3 \in A_1 \cap A_2$. Quindi esisteranno $y^1 \in E_1$ e $y^2 \in E_2$ tali che $x^3 \in B_{r(y^1)}(y^1)$ e $x^3 \in B_{r(y^2)}(y^2)$. Possiamo quindi applicare il Corollario 3.6 su questi due insiemi, ottenendo $f(x^3) = f(y^1) = f(y^2)$. Tuttavia dal fatto che $y^1 \in E_1$ e $y^2 \in E_2$ troviamo

$$f(x^3) = f(y^1) = f(x^1) \neq f(y^2) = f(x^3)\,,$$

arrivando anche in questo caso ad una contraddizione. □

Definizione 3.8. *Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y), si dice Lipschitziana se esiste $L > 0$ (detta costante di Lipschitz) tale che*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)\,, \qquad \forall x_1, x_2 \in X\,.$$

Esempio 3.9. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata limitata è Lipschitziana. Infatti, posto $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ e utilizzando il teorema di Lagrange, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, possiamo trovare un valore $\xi \in (x, y)$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq M|x - y|\,.$$

Il precedente calcolo ci dà anche il valore della costante di Lipschitz.

Esercizio 3.10. *Mostrare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = x^2$ non è Lipschitziana. Suggerimento: usare che la derivata $f'(x) = 2x$ non è limitata.*

Definizione 3.11. *Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con A aperto, si dice localmente Lipschitziana se per ogni $x^0 \in A$ e per ogni $r > 0$ tale che $B_r(x^0) \subseteq A$, esiste $L = L(x^0, r) > 0$ (che dipende dalla scelta di x^0 e r) tale che*

$$\|f(x^1) - f(x^2)\| \leq L\|x^1 - x^2\|\,, \qquad \forall x^1, x^2 \in B_r(x^0)\,.$$

Esercizio 3.12. *Mostrare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = x^2$ è localmente Lipschitziana. Suggerimento: usare che la derivata $f'(x) = 2x$ è continua e ragionare su intervalli compatti come nell'Esempio 3.9.*

Mostrare inoltre che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = \sqrt[3]{x}$ non è Lipschitziana (il problema si riscontra in punti vicini *a zero).*

Esercizio 3.13. *Dimostrare che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ localmente Lipschitziana è continua.*

Esempio 3.14. *Sia $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ un'applicazione lineare, allora T è Lipschitziana.*
Infatti, essendo

$$\|T(x^1) - T(x^2)\| = \|T(x^1 - x^2)\| = \|x^1 - x^2\| \left\| T\left(\frac{x^1 - x^2}{\|x^1 - x^2\|} \right) \right\| , \qquad \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^N ,$$

è sufficiente mostrare che

$$\|T(\nu)\| \le L\|\nu\| \, , \forall \nu \in \mathbb{R}^N \, , \ \|\nu\| = 1 \, .$$

Sia $\mathcal{M}$ la matrice che identifica l'applicazione lineare T, ovvero tale che $T(x) = \mathcal{M} \cdot x$. La componente i-esima di $T(\nu)$ è

$$(T(\nu))_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\nu_j = \langle \mathcal{M}_i \, , \, \nu \rangle \le \|\mathcal{M}_i\| \cdot \|\nu\| = \|\mathcal{M}_i\| \, ,$$

dove $\mathcal{M}_i$ rappresenta l'i-esima riga della matrice $\mathcal{M}$. Quindi possiamo stimare la norma euclidea $T(\nu)$ come segue

$$\|T(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |(T(\nu))_i|^2 \le \sum_{i=1}^{N} \|\mathcal{M}_i\|^2$$

Possiamo quindi definire $L = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathcal{M}_i\|^2}$. Si noti che L è la norma euclidea della matrice $\mathcal{M}$ vista come vettore di $\mathbb{R}^{N \cdot M}$.

Si può definire in generale la norma di un'applicazione lineare $T : X \to Y$ tra due spazi normati come

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{\nu \in X \\ \|\nu\|_X = 1}} \|T(\nu)\|_Y$$

dove abbiamo denotato con $\| \cdot \|_X$ e $\| \cdot \|_Y$ le norme negli spazi vettoriali X e Y rispettivamente.

4 Deriviamo ancora: il differenziale secondo e il polinomio di Taylor

Da qui in poi consideriamo $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita su A aperto. Nel caso di funzioni con codominio $\mathbb{R}^M$ si ragiona analogamente sulle componenti.

Supponiamo che, per un certo indice $i \in \{1, \dots, N\}$, esista per ogni $x \in A$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Quindi possiamo considerare la funzione

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \, .$$

Di questa funzione potrei calcolare le derivate parziali di indice $j \in \{1, \dots, N\}$ nei punti di A, ovvero $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Definizione 4.1. *Si dice derivata parziale del secondo ordine di f in $x^0 \in A$ rispetto alle variabili x_i e x_j, la derivata parziale j-esima della funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e le denoteremo con*

$$\text{der. parz. del sec. ord. mista:} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \, , \qquad i \ne j$$

$$\text{der. parz. del sec. ord. pura:} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Iterando questo procedimento possiamo definire, dove possibile, derivate parziali di ordine k di f in $x^0 \in A$ rispetto alle variabili $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \, .$$

Esempio 4.2. *Consideriamo la funzione $f(x,y) = y^2 \ \cos x$ e calcoliamo le derivate parziali fino al terzo ordine.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2 \ \sin x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \ \cos x\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -y^2 \ \cos x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -2y \ \sin x\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2y \ \sin x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2 \ \cos x\,,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x}\right) = y^2 \sin x\,, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y}\right) = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y \ \sin x\right) = -2y\cos x \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y \ \sin x\right) = -2y\cos x \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2 \ \cos x\right) = -2y\cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 \ \cos x\right) = -2 \ \sin x \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2y \ \sin x\right) = -2 \ \sin x \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2y \ \sin x\right) = -2 \ \sin x
\end{aligned}$$

Notiamo che le derivate miste assumono lo stesso valore indipendentemente dall'ordine con cui facciamo le derivate. Tuttavia importa quante volte deriviamo rispetto ad una variabile piuttosto che rispetto ad un'altra. **Questa non è una regola sempre valida** come illustra il prossimo esempio.

Esempio 4.3. *La funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammette le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \ \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2} + \dfrac{8x^4y^3}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x \ \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2} - \dfrac{4x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verificare i calcoli per esercizio, specialmente nell'origine usando il comportamento di f lungo gli assi. A questo punto possiamo calcolare le derivate seconde nell'origine e trovare:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0\,, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0\,, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1\,, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1\,.$$

I calcoli si fanno sempre considerando le restrizioni lungo gli assi, ma stavolta dobbiamo considerare le funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Le prime due affermazioni seguono dal fatto che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Le seconde invece dal fatto che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Mostro i dettagli dell'ultimo caso, scrivere esplicitamente gli altri per esercizio:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 0}{h} = 1\,.$$

Teorema 4.4 (Teorema di Schwarz)**.** *Consideriamo una funzione* $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, dove* A *è un aperto. Dato* $x^0 \in A$ *e due indici* $i, j \in \{1, \ldots, N\}$*, supponiamo esistano le derivate parziali* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *in un intorno di* x^0*. Supponiamo inoltre che queste siano continue in* x^0*. Allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)\,.$$

Dimostrazione. Dimostreremo, al solo fine di semplificare le notazioni, il teorema nel caso $N = 2$. Possiamo considerare, senza perdere in generalità $A = B(x^0, r)$ per un certo $r > 0$ e usiamo la notazione $x^0 = (x_0, y_0)$.

Definiamo la funzione $F : A \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)\,.$$

Fissiamo un generico $(x_1, y_1) \in A$. Per semplicità supponiamo $x_1 > x_0$ e $y_1 > y_0$ (esercizio: senza questa ipotesi, cosa dovremmo cambiare nei prossimi passaggi?).

Dapprima definiamo la funzione $g : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$ tale che $g(y) = f(x_1, y) - f(x_0, y)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) &= g(y_1) - g(y_0) \overset{[1]}{=} g'(\eta)(y_1 - y_0) \\ &\overset{[2]}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)\right](y_1 - y_0) \\ &\overset{[3]}{=} \left[G_\eta(x_1) - G_\eta(x_0)\right](y_1 - y_0)\,, \\ &\overset{[4]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta)(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\,, \end{aligned}$$

dove $\eta \in (y_0, y_1)$, $\xi \in (x_0, x_1)$. In particolare, in [1] abbiamo utilizzato il teorema di Lagrange per la funzione g, in [2] abbiamo scritto il valore della derivata $g'(\eta)$ ottenuta dalla definizione della funzione g, quindi abbiamo definito in [3] la funzione $G_\eta(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$ e applicato nuovamente in [4] il teorema di Lagrange alla funzione $G_\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ esprimendo direttamente il valore di $G'_\eta(\xi)$.

Vogliamo ora trovare una stima differente per lo stesso valore. In particolare ora definiamo la funzione $h : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ tale che $h(x) = f(x, y_1) - f(x, y_0)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) &= h(x_1) - h(x_0) \overset{[a]}{=} h'(\alpha)(x_1 - x_0) \\ &\overset{[b]}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y_0)\right](x_1 - x_0) \\ &\overset{[c]}{=} \left[H_\alpha(y_1) - H_\alpha(y_0)\right](x_1 - x_0)\,, \\ &\overset{[d]}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta)(y_1 - y_0)(x_1 - x_0)\,, \end{aligned}$$

dove $\alpha \in (x_0, x_1)$, $\beta \in (y_0, y_1)$. Come sopra, in [*a*] abbiamo utilizzato il teorema di Lagrange per la funzione h, in [*b*] abbiamo scritto il valore della derivata $h'(\alpha)$, quindi abbiamo definito in [*c*] la funzione $H_\alpha(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y)$ quindi in [*d*] abbiamo applicato il teorema di Lagrange alla funzione $H_\alpha : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$.

Dai passaggi precedenti abbiamo dimostrato che

$$\frac{F(x_1, y_1)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta)\,.$$

Ricordiamo che nei passaggi precedenti i valori ξ, η, α, β dipendono tutti dalla scelta iniziale del punto (x_1, y_1) considerato. Quindi passando al limite $(x_1, y_1) \to (x_0, y_0)$ abbiamo $\xi, \alpha \to x_0$ e $\eta, \beta \to y_0$. Di conseguenza, vista l'ipotesi di continuità delle derivate parziali del secondo ordine abbiamo la tesi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\,.$$

□

Problema. Nel precedente enunciato, dobbiamo calcolare entrambe le derivate seconde, verificare che sono continue in x^0 e poi possiamo concludere che il loro valore in x^0 è lo stesso. Obiezione: ma se per vedere che sono continue già me le sono calcolate, non vedrei già che hanno lo stesso valore?

Risposta: esiste una versione più generale del teorema di Schwarz formulata da Peano:

Data la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dove A è un aperto. Dato $x^0 \in A$ e due indici $i, j \in \{1, \dots, N\}$, supponiamo esistano le derivate parziali del primo ordine $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ in un intorno di x^0. Supponiamo inoltre che esista $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in un intorno di x^0 e che sia continua in x^0. Allora la derivata parziale $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ esiste in x^0 con lo stesso valore.

Definizione 4.5. *Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dove A è un aperto. Diremo che f è di classe C^k su A (con $k \in \mathbb{N}$) se tutte le derivate parziali di ordine k esistono e sono continue in A. In particolare denoteremo con $C^0(A)$ lo spazio delle funzioni continue in A, con $C^k(A)$ lo spazio delle funzioni di classe C^k e*

$$C^\infty(A) := \bigcap_{k \geq 1} C^k(A)$$

l'insieme avente derivate parziali di qualsiasi ordine continue. In particolare

$$C^0(A) \supseteq C^1(A) \supseteq C^2(A) \supseteq \cdots \supseteq C^k(A) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(A)\,.$$

Definizione 4.6 (Matrice Hessiana)**.** *Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dove A è un aperto, $f \in C^2(A)$. Allora il gradiente $\nabla f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è una funzione differenziabile di classe C^1 su A e quindi ad essa posso associare una matrice Jacobiana. Tale matrice conterrà le derivate parziali delle componenti di ∇f: quindi conterrà le derivate parziali del secondo ordine. Tale matrice è detta* **matrice Hessiana** *di f. Dato $x^0 \in A$ la denoteremo come*

$$Hf(x^0) = J(\nabla f)(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(x^0) \end{pmatrix}$$

Questa matrice, essendo soddisfatte in questo caso le ipotesi del Teorema di Schwarz, risulta una matrice **simmetrica** *e quindi* **diagonalizzabile**.

5 Il polinomio di Taylor - cenno

Veniamo ora all'ultimo obiettivo di questa parte: la costruzione del polinomio di Taylor associato ad una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ centrato in un punto $x^0 \in A$. Di questo daremo solo un'idea, in quanto notazioni e formule in questo caso assumono estetiche decisamente pesanti.

Consideriamo come al solito $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e ricordiamo la notazione $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N$ per un punto fissato. Nostro obiettivo ora è cercare di definire una generica derivata parziale di ordine $d \in \mathbb{N}$ in un certo numero di variabili fra le scelte $x_1, \dots, x_N$. Tali scelte possono essere ripetute più volte. A questo scopo introduciamo il concetto di multi-indice. Si tratta di un vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ dove ogni componente è un numero naturale (zero incluso). Il multi-indice denoterà quante volte α_k dovremo derivare una certa funzione nella variabile x_k. Ne consegue che in tutto dovremo calcolare

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$$

derivate in tutto. Il valore $|\alpha|$ si dice lunghezza del multi-indice. Ad esempio, se abbiamo una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ derivabile 4 volte con continuità, la derivata

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_3^2 \partial x_4}$$

si calcolerà calcolando successivamente una volta la derivata parziale rispetto alla prima variabile, poi due volte la derivata parziale rispetto alla terza variabile, quindi concluderemo derivando il risultato rispetto alla quarta variabile. Se per esempio consideriamo

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin(x_1)\, x_2\, x_3^4\, x_4^2$$

dovremo calcolare

$$\begin{aligned} \sin(x_1)\, x_2\, x_3^4\, x_4^2 &\overset{\partial x_1}{\to} \cos(x_1)\, x_2\, x_3^4\, x_4^2 \\ &\overset{\partial x_3}{\to} 4\cos(x_1)\, x_2\, x_3^3\, x_4^2 \\ &\overset{\partial x_3}{\to} 12\cos(x_1)\, x_2\, x_3^2\, x_4^2 \\ &\overset{\partial x_4}{\to} 24\cos(x_1)\, x_2\, x_3^2\, x_4 \end{aligned}$$

ottenendo quindi

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_3^2 \partial x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 24\cos(x_1)\, x_2\, x_3^2\, x_4\,.$$

La precedente derivata parziale di ordine $d = 4$ è rappresentata dal multi-indice $\alpha = (1, 0, 2, 1)$ e notiamo che $|\alpha| = 1 + 0 + 2 + 1 = d = 4$.

Dal teorema di Schwarz sappiamo che non importa l'ordine con cui calcoliamo via via le derivate successive, quindi possiamo definire la derivata parziale associata ad un multi-indice α (notiamo che sarà una derivata parziale di ordine $|\alpha|$)

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}\, \ldots\, \partial x_N^{\alpha_N}} \tag{12}$$

In particolare posto $\alpha = (1, 0, 2, 1)$ abbiamo ad esempio

$$D^{(1,0,2,1)} f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_3^2 \partial x_4} = f_{x_1\, x_3\, x_3\, x_4} = f_{x_3\, x_4\, x_3\, x_1}\,. \tag{13}$$

Notiamo che per ogni *anagramma della parola* $x_1\, x_3\, x_3\, x_4$ troviamo un altro possibile modo di calcolare la derivata parziale in (13). Il numero di anagrammi possibili di una parola di d lettere dove ogni lettera appare d_k volte risulta

$$\frac{d!}{d_1! \cdot d_2! \cdots d_N!}$$

(dovreste averla già vista alle superiori se avete fatto un liceo scientifico).

Possiamo interpretare le derivate di ordine d nelle variabili $x_1, \ldots, x_N$ come parole di d lettere scritte nell'alfabeto costituito dalle N *lettere* $x_1, \ldots, x_N$. Inoltre, dal teorema di Schwarz, nella *lingua delle derivate*, parole che sono anagramma della stessa parola coincidono, quindi le due *parole* $x_1\, x_3\, x_3\, x_4$ e $x_3\, x_4\, x_3\, x_1$ coincidono (è come se vi dicessi che CANE e CENA fossero la stessa cosa, ma evidentemente non è così per la lingua italiana). Alle parole $x_1\, x_3\, x_3\, x_4$ e $x_3\, x_4\, x_3\, x_1$ è associata la stessa derivata come in (13) e quindi lo stesso multi-indice $\alpha = (1, 0, 2, 1)$. Il numero di anagrammi di $x_1\, x_3\, x_3\, x_4$ risulta quindi

$$\frac{4!}{1! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 1!} = 12\,,$$

quindi il multi-indice $\alpha = (1, 0, 2, 1)$ *nasconde* 12 modi differenti di calcolare la derivata $D^\alpha f$ definita in (13). In generale, dato un multi-indice α possiamo calcolare la derivata $D^\alpha f$ di multi-indice α in

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_N!} \tag{14}$$

modi differenti (chiamiamo per semplicità questo numero *molteplicità* della derivata $D^\alpha f$). Nella formula sopra abbiamo introdotto il fattoriale di un multi-indice definito come il prodotto dei fattoriali delle sue componenti, ovvero

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_N!\,.$$

In particolare troviamo nel nostro esempio $\alpha! = (1, 0, 2, 1)! = 2$.

La frazione in (14) compare nella formula del polinomio di Taylor.

Ad ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ possiamo associare un monomio nelle variabili $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ nel modo seguente

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}.$$

Nel caso $\alpha = (1, 0, 2, 1)$ troviamo il monomio $x^\alpha = x_1\, x_3^2\, x_4$. Riconosciamo quindi che derivate di ordine d e monomi di grado d sono in biiezione.

In modo analogo a quanto appena esposto possiamo definire

$$(x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}\, (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \cdots (x_N - x_N^0)^{\alpha_N}.$$

Questa notazione comparirà nella formula del polinomio di Taylor.

Siamo ora pronti a scrivere il polinomio di Taylor.

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dove A è aperto e f è di classe C^k, $k \geq 1$. Prendiamo

$$\begin{aligned} x^0 &= (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in A\,, \\ h &= (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N\,, \\ x = x^0 + h &= (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_N^0 + h_N) \in A\,. \end{aligned}$$

Definiamo il **polinomio di Talor** di grado k associato a f centrato in x^0 come

$$\begin{aligned} P_k(x) &= \sum_{d=0}^{k} \frac{1}{d!} Q_d^f(x - x^0) \\ &= \sum_{d=0}^{k} \frac{1}{d!} \left[\sum_{|\alpha|=d} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha f(x^0)(x - x^0)^\alpha \right] \\ &= \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x^0)(x - x^0)^\alpha \end{aligned}$$

Il polinomio P_k ha la seguente proprietà: per ogni $x \in A$, la funzione $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$ soddisfa

$$\lim_{x \to x^0} \frac{R_k(x)}{\|x - x^0\|^k} = 0\,.$$

Nel caso particolare $x^0 = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} P_k(x) &= \sum_{d=0}^{k} \frac{1}{d!} Q_d^f(x) \\ &= \sum_{d=0}^{k} \frac{1}{d!} \left[\sum_{|\alpha|=d} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha \right] \\ &= \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha \end{aligned}$$

Soffermiamoci sul termine Q_d^f: esso è un polinomio omogeneo di grado d, ovvero è una somma di monomi tutti di grado d, nella seconda riga notiamo che la sommatoria va fatta su tutti i multi-indici di lunghezza d, quindi su tutte le possibili derivate di ordine d valutate in $x^0 = 0$ e queste vengono contate con la loro *molteplicità*. Nella terza riga le due sommatorie sono assorbite in una sola e i termini $d!$ sono stati semplificati.

Ricordiamo che nel caso di funzioni $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo solo una variabile, quindi $Q_d^f(x - x^0)$ diventa semplicemente il noto termine $f^{(d)}(x_0)(x - x_0)^d$. Il resto R_k risulta l'analogo del resto di Peano visto già per funzioni di variabile reale.

Per valori piccoli di d il polinomio

$$Q_d^f(x - x^0) = \sum_{|\alpha|=d} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha f(x^0)(x - x^0)^\alpha$$

assume una particolare forma.

Per $d=0$ abbiamo $Q_0^f(x-x_0)=f(x^0)$ e per $d=1$ abbiamo

$$Q_1^f(x-x^0)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)(x_k-x_k^0)=\left\langle \nabla f(x^0)\,,\,x-x^0\right\rangle\,.$$

Infine, per $d=2$ troviamo

$$\begin{aligned}Q_2^f(x-x^0)\quad &=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x^0)\;(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)\\ &=\left\langle H_f(x^0)(x-x^0)\,,\,x-x^0\right\rangle\end{aligned}$$

dove si riconosce, nel caso $x^0=0$ la forma quadratica di un'applicazione bilineare simmetrica: $x^t\,Sx=\langle Sx\,,\,x\rangle$.

Al fine di meglio chiarire la costruzione del polinomio di Taylor concludiamo questa parte con degli esempi.

Esempio 5.1. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 centrato nel punto $x^0=0=(0,0,0)$ della funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+yz}-4z\sin x\,.$$

Per $d=0$ dobbiamo calcolare semplicemente $Q_d^f(x,y,z)=f(0)=1$, per $d=1$ calcoliamo dapprima il gradiente di f

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\mathrm{e}^{x+yz}-4z\cos x\,,\,z\mathrm{e}^{x+yz}\,,\,y\mathrm{e}^{x+yz}-4\sin x\right)\,,$$

quindi lo valutiamo nell'origine trovando $\nabla f(0)=(1,0,0)$, quindi

$$Q_1^f(x,y,z)=\langle(1,0,0)\,,\,(x,y,z)\rangle=x\,.$$

Per $d=2$ necessitiamo delle derivate parziali del secondo ordine da cui poi scriveremo la matrice Hessiana:

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y,z)&=\mathrm{e}^{x+yz}+4z\sin x\\ f_{xy}(x,y,z)&=z\mathrm{e}^{x+yz}\\ f_{xz}(x,y,z)&=y\mathrm{e}^{x+yz}-4\cos x\\ f_{yy}(x,y,z)&=z^2\mathrm{e}^{x+yz}\\ f_{yz}(x,y,z)&=(yz+1)\mathrm{e}^{x+yz}\\ f_{zz}(x,y,z)&=y^2\mathrm{e}^{x+yz}\end{aligned}$$

da cui, valutando la matrice Hessiana nell'origine,

$$H_f(0)=\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&0&1\\-4&1&0\end{pmatrix}\,.$$

A questo punto possiamo calcolare

$$\begin{aligned}Q_2^f(x,y,z)\quad &=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&0&1\\-4&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &=x^2-8xz+2yz\,.\end{aligned}$$

Veniamo ora alle derivate del terzo ordine, nella seconda colonna compare il valore assunto nell'origine, nella terza la molteplicità *della derivata come introdotta sopra, ovvero il numero di anagrammi del primo pedice. Infine la quarta colonna contiene in monomio x^α associato, in questo caso si ottiene moltiplicando le* *lettere del pedice.*

derivate	*parziali*	*valore*	#	*monomio*
$f_{xxx}(x,y,z)$	$= \mathrm{e}^{x+yz} + 4z\cos x$	1	1	x^3
$f_{xxy}(x,y,z)$	$= z\mathrm{e}^{x+yz}$	0	3	x^2y
$f_{xxz}(x,y,z)$	$= y\mathrm{e}^{x+yz} + 4\sin x$	0	3	x^2z
$f_{yyy}(x,y,z)$	$= z^3\mathrm{e}^{x+yz}$	0	1	y^3
$f_{yyz}(x,y,z)$	$= (yz^2+2z)\mathrm{e}^{x+yz}$	0	3	y^2z
$f_{yzz}(x,y,z)$	$= (y^2z+2y)\mathrm{e}^{x+yz}$	0	3	yz^2
$f_{xyy}(x,y,z)$	$= z^2\mathrm{e}^{x+yz}$	0	3	xy^2
$f_{xyz}(x,y,z)$	$= (yz+1)\mathrm{e}^{x+yz}$	1	6	xyz
$f_{xzz}(x,y,z)$	$= y^2\mathrm{e}^{x+yz}$	0	3	xz^2
$f_{zzz}(x,y,z)$	$= y^3\mathrm{e}^{x+yz}$	0	1	z^3

Siamo quindi pronti a scrivere il polinomio Q_3^f. Esso si ottiene moltiplicando in ogni riga i termini delle ultime tre colonne e poi sommando tutti i risultati:

$$Q_3^f(x) = 1 \cdot 1 \cdot x^3 + 1 \cdot 6 \cdot xyz = x^3 + 6xyz\,.$$

Quindi il polinomio di Taylor di grado 3 cercato risulta:

$$\begin{aligned} P_3^f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - 8xz + 2yz) + \frac{1}{6}(x^3 + 6xyz) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - 4xz + yz + \frac{x^3}{6} + xyz\,. \end{aligned}$$

Come nota finale, visto il numero di derivate del terzo ordine che abbiamo dovuto calcolare, possiamo immaginare quanti calcoli siano necessari per scrivere il termine Q_4^f qualora si voglia trovare il polinomio di Taylor di grado 4.

Esempio 5.2. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione f dell'esercizio precedente, ma centrato in $P = (0,0,1)$.*

In questo caso, dopo aver calcolato le derivate parziali, dobbiamo valutarle in P:

$$\begin{gathered} f(P) = 1\,, \\ \nabla f(P) = (-3, 1, 0)\,, \\ H_f(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \end{gathered}$$

Da questi valori calcoliamo il polinomio di Taylor di grado 2:

$$\begin{aligned} P_2^f(x) = \quad & 1 + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le derivate del terzo ordine danno i valori nella prima colonna, nella seconda riportiamo la molteplicità e nella terza il termine che comparirà nella sommatoria che descrive Q_3^f: per ottenerlo ad ogni variabile x, y, z dobbiamo sostituire i termini $x - x_0, y - y_0, z - z_0$. Nel nostro esempio z è sostituito da $z - 1$, gli altri non sono *modificati:*

valore	*derivate*	#	*"monomio"*
$f_{xxx}(P) =$	5	1	x^3
$f_{xxy}(P) =$	1	3	x^2y
$f_{xxz}(P) =$	0	3	$x^2(z-1)$
$f_{yyy}(P) =$	1	1	y^3
$f_{yyz}(P) =$	2	3	$y^2(z-1)$
$f_{yzz}(P) =$	0	3	$y(z-1)^2$
$f_{xyy}(P) =$	1	3	xy^2
$f_{xyz}(P) =$	1	6	$xy(z-1)$
$f_{xzz}(P) =$	0	3	$x(z-1)^2$
$f_{zzz}(P) =$	0	1	$(z-1)^3$

Con la stessa procedura scritta sopra otteniamo quindi

$$\begin{aligned} Q_3^f(x,y,z-1) &= 5\cdot 1\cdot x^3 + 1\cdot 3\cdot x^2y + 1\cdot 3\cdot xy^2 \\ &\quad + 1\cdot 6\cdot xy(z-1) + 1\cdot 1\cdot y^3 + 2\cdot 3\cdot y^2(z-1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} P_3(x) = \quad & 1 + (-3x+y) + \tfrac{1}{2}\big(x^2 + 2xy - 8x(z-1) + y^2 + 2y(z-1)\big) \\ & + \tfrac{1}{6}\big(5x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 6xy(z-1) + y^3 + 6y^2(z-1)\big)\,. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor così come appare sopra è scritto in rappresentazione canonica*. In sede d'esame sarà sufficiente scrivere il polinomio in questa forma senza moltiplicare le parentesi.*